C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 1109-1112 (26 avril 1971). Série A

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Systèmes d'équations différentielles héréditaires à retards fixes. Une classe de systèmes affines et le problème du système adjoint.* Note (*) de MM. **Michel Delfour** et **Sanjoy Mitter**, présentée par M. Jean Leray.

Définition des systèmes affines et représentables. Définition et caractérisation du système adjoint. Relation entre la solution fondamentale du système et celle du système adjoint.

1. Préliminaires. — Cette Note fait suite à une Note précédente [1] où furent présentés les théorèmes fondamentaux pour les systèmes d'équations différentielles héréditaires à retards fixes. Nous supposerons donc connues les notations et définitions de [1]. Soit m_2 la mesure de Lebesgue dans R^2 et pour $t \in]t_0, t_1[$ soit $L^p(t_0, t; -b, 0; E)$ l'espace de Banach de toutes les applications m_2-mesurables [au sens de Lang [2]]

$$[t_0, t] \times I(-b, 0) \to E$$

qui sont p-intégrables, $1 \leq p < \infty$, ou essentiellement bornées, $p = \infty$. Nous utiliserons aussi l'espace de Fréchet $L^p_{loc}(t_0, t_1; -b, 0; E)$ de toutes les applications m_2-mesurables $x : [t_0, t_1[\times I(-b, 0) \to E$ tel que la restriction de x à $[t_0, t] \times I(-b, 0)$, soit dans $L^p(t_0, t; -b, 0; E)$ pour tout $t \in]t_0, t_1[$. Enfin dans un Hilbert H la transformation adjointe de $A \in \mathcal{L}(H)$ sera dénotée par A^* et la transformation identité par I.

2. Systèmes affines et systèmes représentables. — L'isomorphisme isométrique $f \mapsto (f(0), f)$ entre $M^p(-b, 0; E)$ et $E \times L^p(-b, 0; E)$ nous permet de définir un système héréditaire différentiel, soit à partir d'une application $f : [t_0, t_1[\times E^{N+1} \times L^p(-b, 0; E) \to E$, soit à partir d'une application $f : [t_0, t_1[\times B^p(-b, 0; E) \to E$,

$$B^p(-b, 0; E) = E^N \times M^p(-b, 0; E).$$

Définition 1. — (*a*) Un système héréditaire différentiel correspondant à l'application $f : [t_0, t_1[\times E^{N+1} \times L^p(-b, 0, E) \to E$ est *affine* si pour tout t dans $[t_0, t_1[$ l'application $z \mapsto f(t, z)$ est affine et si f possède les propriétés (CAR-1), (LIP) et (BC) du théorème 1 [1].

(*b*) Soit $E = H$, H un hilbert. Un système est *représentable* si f est de la forme

$$f(t, (z_N, \ldots, z_1, z_{00}, z_{01})) = \sum_{j=1}^{N} A_j(t) z_j + A_{00}(t) z_{00} + \int_{-b}^{0} A_{01}(t, \theta) z_{01}(\theta) \, d\theta + g(t),$$

où A_{00} et A_j, $j = 1, \ldots, N$, appartiennent à $L^q_{loc}(t_0, t_1; \mathcal{L}(H))$, A_{01} à $L^q_{loc}(t_0, t_1; -b, 0; \mathcal{L}(H))$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, et g à $L^1_{loc}(t_0, t_1; H)$. ■

Un système représentable est affine, mais il n'est pas certain qu'un système affine soit nécessairement représentable.

Proposition 1. — *Soit* $\varphi(.\,; s, h, g)$ *la solution dans* $[s, t_1[$, $s \in [t_0, t_1[$, *de l'équation différentielle*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{N} A_j(t)\begin{cases} x(t+\theta_j), & t+\theta_j \geq s \\ h(t-s+\theta_j), & t+\theta_j < s \end{cases} + A_{00}(t)x(t) + \ldots \\ &\qquad + \int_{-b}^{0} A_{01}(t, \theta)\begin{cases} x(t+\theta), & t+\theta \geq s \\ h(t-s-\theta), & t+\theta < s \end{cases} d\theta + g(t) \quad p.p.\ dans\ [s, t_1[, \\ &x(t_0) = h(0), \qquad h \in M^p(-b, 0; H), \qquad 1 \leq p < \infty \end{aligned}\right.$$

correspondant au système représentable de la définition 1. *Alors*

(*a*) $\quad (h, g) \mapsto \varphi(.\,: s, h, g): \quad M^p(-b, 0; H) \times L^1_{loc}(t_0, t_1; H) \to AC^1_{loc}(t_0, t_1; H)$

est une application linéaire continue, et

(*b*) *l'application* $(t, s) \mapsto \varphi(t; s, h, g): \mathcal{T}(t_0, t_1) \to H$ *est continue*

$$(\mathcal{T}(t_0, t_1) = \{(t, s) \in [t_0, t_1[\times [t_0, t_1[\mid t \geq s\}). \quad \blacksquare$$

3. Le système adjoint. — Soit $1 \leq p < \infty$, $t \in]t_0, t_1[$, $k \in M^p(-b, 0; H)$ et $y \in C(t_0, t; H)$. Le *produit héréditaire* de k et y au temps t est une fonction $s \mapsto \mathcal{H}(s; t; k, y)$ définie dans $[t_0, t]$ par

$$\mathcal{H}(s; t, k, y) = (y(s) \mid k(0)) + \int_{-b}^{0} (\mathcal{A}^*(s; t, y)(\alpha) \mid k(\alpha))\, d\alpha,$$

où l'application $s \mapsto \mathcal{A}^*(s, t, y): \quad [t_0, t] \to L^q(-b, 0; \mathcal{L}(H))$ est elle-même définie par

$$\mathcal{A}^*(s; t, y)(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\begin{cases} A_i^*(s+\alpha-\theta_i)\,y(s+\alpha-\theta_i), & \alpha+s-t < \theta_i \leq \alpha \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} + \ldots$$
$$+ \begin{cases} \displaystyle\int_{-b}^{\alpha} A_{01}^*(s+\alpha-\theta, \theta)\,y(s+\alpha-\theta)\,d\theta, & s+\alpha \leq t-b \\ \displaystyle\int_{\alpha+s-t}^{\alpha} A_{01}^*(s+\alpha-\theta, \theta)\,y(s+\alpha-\theta)\,d\theta, & s+\alpha > t-b \end{cases}.$$

Dans le cas $b = a$, $A_{01} = 0$, $N = 1$ un groupe de termes dont le produit héréditaire est une généralisation fut utilisé par A. Halanay [3] et J. K. Hale [4] pour des systèmes autonomes à données initiales continues.

Définition 2. — La *solution adjointe* dans $[t_0, t]$ avec donnée finale $k^0 \in H$ pour le système (1) est un élément y de $AC^1(t_0, t; H)$ tel que

$$\mathcal{H}(r; t, (h \circ x)_r, y) = (k^0 \mid x(t_1)), \qquad r \in [t_0, t],$$

où x est la solution globale de (1) dans $[t_0, t]$ pour la donnée initiale h avec $g = 0$. $\blacksquare$

THÉORÈME 1. — *Dans les conditions de la définition 2, y est l'unique solution dans* $AC^1(t_0, t; H)$ *du* système adjoint *défini par*

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dp}{dr}(r) + \sum_{i=1}^{N} \begin{cases} A_i^*(r-\theta_i)\, y(r-\theta_i), & r-\theta_i \leq t \\ 0, & r-\theta_i > t \end{cases} + A_{00}^*(r)\, y(r) + \ldots \\
&\qquad + \int_{-b}^{0} \begin{cases} A_{01}^*(r-\theta, \theta)\, y(r-\theta), & r-\theta \leq t \\ 0, & r-\theta > t \end{cases} d\theta = 0 \quad p.p. \text{ dans } [t_0, t], \\
&\qquad\qquad y(t) = k^0. \quad \blacksquare
\end{aligned}
\right.
$$

4. LES SOLUTIONS FONDAMENTALES.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\varphi(t; t_0, h, g)$ *la solution de* (1). *L'application*

$$
(h, g) \mapsto \varphi(t; t_0, h, g) : \quad M^p(-b, 0; H) \times L^1_{loc}(t_0, t_1; H) \to H
$$

a pour représentation

$$
\varphi(t; t_0, h, g) = \Phi^0(t, t_0)\, h(0) + \int_{-b}^{0} \Phi^1(t, t_0, \eta)\, h(\eta)\, d\eta + \int_{t_0}^{t} \Phi^0(t, s)\, g(s)\, ds,
$$

où $\Phi^0(t, s)$ et $\Phi^1(t, t_0, \eta)$ *sont des éléments de* $\mathcal{L}(H)$ *définis comme suit :*

(*a*) $\Phi^0(t, s)$, $t \geq s$. — *Pour tout* $s \in [t_0, t_1[$ *l'application*

$$
t \mapsto \Phi^0(t, s) : \quad [s, t_1[\to \mathcal{L}(H)
$$

est l'unique solution de l'équation suivante à valeurs dans $\mathcal{L}(H)$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi^0}{\partial t}(t, s) = \sum_{i=1}^{N} \begin{cases} A_i(t)\, \Phi^0(t+\theta_i, s), & s-\theta_i \leq t \\ 0, & s-\theta_i > t \end{cases} + A_{00}(t)\, \Phi^0(t, s) + \ldots \\
&\qquad + \int_{-b}^{0} \begin{cases} A_{01}(t, \theta)\, \Phi^0(t+\theta, s), & s-\theta \leq t \\ 0, & s-\theta > t \end{cases} d\theta \quad p.p. \text{ dans } [s, t_1[, \\
&\qquad\qquad \Phi^0(s, s) = I.
\end{aligned}
\right.
$$

De plus, l'application $(t, s) \mapsto \Phi^0(t, s) : \mathfrak{T}(t_0, t_1) \to \mathcal{L}(H)$ *est continue.*

(*b*) $\Phi^1(t, t_0, \eta)$, $t \geq t_0$, $\eta \in I(-b, 0)$. — *L'application*

$$
(t, \eta) \mapsto \Phi^1(t, t_0, \eta) : \quad [t_0, t_1[\times I(-b, 0) \to \mathcal{L}(H)
$$

s'exprime en fonction de Φ^0 *comme suit :*

$$
\begin{aligned}
\Phi^1(t, t_0, \eta) = {} & \sum_{i=1}^{N} \begin{cases} \Phi^0(t, s-\eta-\theta_i)\, A_i(s+\eta-\theta_i), & \eta+s-t < \theta_i \leq \eta \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} + \ldots \\
& + \begin{cases} \displaystyle\int_{-b}^{\eta} \Phi^0(t, s+\eta-\theta)\, A_{01}(s+\eta-\theta, \theta)\, d\theta, & s+\eta \leq t-b \\ \displaystyle\int_{\eta+s-t}^{\eta} \Phi^0(t, s+\eta-\theta)\, A_{01}(s-\eta-\theta, \theta)\, d\theta, & s+\eta > t-b \end{cases}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

COROLLAIRE. — *Soit* $\psi(t;\, t_0,\, k^0)$ *la solution de* (2). *L'application*

$$k^0 \mapsto \psi(s;\, t,\, k^0) : \quad \mathrm{H} \to \mathrm{H}$$

a pour représentation $\psi(s;\, t,\, k^0) = \Psi^0(s,\, t) k^0$, *où l'application*

$$s \mapsto \Psi^0(s,\, t) : \quad [t_0,\, t] \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$$

est l'unique solution de l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Psi^0}{\partial s}(s,\, t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{A}_i^*(s-\theta_i)\Psi^0(s-\theta_i,\, t), & s-\theta_i \leq t \\ 0, & s-\theta_i > t \end{array}\right\} + \mathrm{A}_{00}^*(s)\Psi^0(s,\, t) + \ldots \\ \qquad + \displaystyle\int_{-b}^{0} \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{A}_{01}^*(s-\theta,\, \theta)\Psi^0(s-\theta,\, t), & s-\theta \leq t \\ 0, & s-\theta > t \end{array}\right\} d\theta = 0 \quad p.p. \; dans \; [t_0,\, t], \\ \Psi^0(t,\, t) = \mathrm{I}. \quad \blacksquare \end{array}\right.$$

PROPOSITION 2. — $\Phi^0(t,\, s) = \Psi^0(s,\, t)^*$, $(t,\, s) \in \mathfrak{T}(t_0,\, t_1)$. $\blacksquare$

Remarque. — Notons que :

$t \mapsto \Phi^0(t,\, s) : [s,\, t_1[\to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est dans $\mathrm{AC}^1_{\mathrm{loc}}(s,\, t_1;\, \mathcal{L}(\mathrm{H}))$ pour tout $s \in [t_0,\, t_1[$;

$s \mapsto \Phi^0(t,\, s) : [t_0,\, t] \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est dans $\mathrm{AC}^1(t_0,\, t;\, \mathcal{L}(\mathrm{H}))$ pour tout $t \in [t_0,\, t_1[$,

et que

$(s,\, t) \mapsto \Phi^0(t,\, s) : \mathfrak{T}(t_0,\, t_1) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est continue.

(*) Séance du 5 avril 1971.

(1) M. DELFOUR et S. MITTER, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 382.

(2) S. LANG, *Analysis II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

(3) A. HALANAY, *Differential Equations; Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, 1966.

(4) J. K. HALE, *Contributions to Differential Equations*, 2, 1963, p. 291-319.

(M. D. : *Centre de Recherches mathématiques,*
Université de Montréal,
Montréal 101,
Québec, Canada;
S. M. : *Electronic Systems Laboratory,*
Massachusetts Institute of Technology,
Cambridge,
Massachusetts 02139,
U. S. A.)

183787. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 382-385 (1er février 1971). Série A

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Systèmes d'équations différentielles héréditaires à retards fixes. Théorèmes d'existence et d'unicité.* Note (*) de MM. **Michel Delfour** et **Sanjoy Mitter**, présentée par M. Jean Leray.

Espaces de fonctions requis. Formulation unifiée des problèmes global et local de Cauchy dans un Banach. Théorème d'existence pour les systèmes du type Carathéodory et théorème d'existence et d'unicité pour les systèmes du type Lipschitz. Continuité de la solution par rapport à la donnée initiale.

1. Espaces de fonctions. — Nous utiliserons la théorie de l'intégration et des espaces L^p à valeurs dans un Banach E développée par S. Lang (1). Pour $\alpha < \beta$ dans $[-\infty, +\infty]$ nous définissons $I(\alpha, \beta)$ comme l'intersection de $[\alpha, \beta]$ et de l'ensemble R des réels. $\mathcal{L}^p(\alpha, \beta; E)$ sera l'espace vectoriel des applications $I(\alpha, \beta) \to E$ qui sont m-mesurables (m, la mesure de Lebesgue pour R) et p-intégrables, $1 \leq p < \infty$, ou bornées presque partout, $p = \infty$; l'espace de Banach obtenu en passant au quotient sera dénoté par $L^p(\alpha, \beta; E)$ et la norme L^p par $\| \ \|_p$.

Supposons b dans $]0, +\infty]$. Nous voulons passer de données initiales dans $C(-b, 0; E)$ à des données qui soient p-intégrables. Pour cela nous introduisons dans $\mathcal{L}^p(-b, 0; E)$ la semi-norme

$$n_p(y) = [\, |y(0)|^p + \|y\|_p^p \,]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

et formons l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(-b, 0; E)$ par le sous-espace linéaire formé des éléments y tels que $n_p(y) = 0$. Ce dernier sera noté $M^p(-b, 0; E)$ et sa norme $\| \ \|_{M^p}$. Il existe un isomorphisme entre cet espace et le produit $E \times L^p(-b, 0; E)$.

Finalement nous précisons l'espace dans lequel nous chercherons nos solutions. Soit $t_0 \in R$ et $t_1 \in]t_0, +\infty]$. Pour $t \in]t_0, t_1[$ soit $AC^p(t_0, t; E)$ l'espace vectoriel de toutes les applications $x : [t_0, t] \to E$ dont la dérivée existe dans $\mathcal{L}^p(t_0, t; E)$ et pour lesquelles

$$x(s) = x(t_0) + \int_{t_0}^{s} \frac{dx}{du}(u)\, du, \qquad s \in [t_0, t].$$

Équipé de la norme

$$\|x\|_{AC^p} = \left[\, |x(t_0)|^p + \int_{t_0}^{t} \left| \frac{dx}{ds}(s) \right|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$AC^p(t_0, t; E)$ est isomorphe à $E \times L^p(t_0, t; E)$. Nous aurons aussi besoin de $C(t_0, t; E)$, l'espace de Banach formé des applications continues de $[t_0, t]$ dans E, dont la norme sera écrite $\| \ \|_C$.

Soit $\pi_t(x)$ la restriction d'une application $x : [t_0, t_1[\to E$ à l'intervalle $[t_0, t]$ pour $t \in]t_0, t_1[$. Soient $L^p_{loc}(t_0, t_1; E)$, $AC^p_{loc}(t_0, t_1; E)$ et $C_{loc}(t_0, t_1; E)$ les espaces vectoriels des applications $x : [t_0, t_1[\to E$ tel que pour tout $t \in]t_0, t_1[$ $\pi_t(x)$ soit dans $L^p(t_0, t; E)$, $AC^p(t_0, t; E)$ et $C(t_0, t; E)$, respectivement. Ce sont des espaces de Fréchet quand leur topologie est définie par la famille de semi-normes $q_t(x) = \| \pi_t(x) \|_F$, $t \in]t_0, t_1[$, où F est L^p, AC^p ou C selon le cas.

2. Formulation du problème de Cauchy. — Nous nous donnons un entier $N \geq 1$, des réels $a > 0$ et $-a = \theta_N < \ldots < \theta_1 < \theta_0 = 0$ et un espace de Banach E. Dans les définitions suivantes nous désignerons par b, soit le réel a ou $+\infty$. Nous nous donnons aussi p, $1 \leq p < \infty$, h dans $M^p(-b, 0; E)$ et une application

$$f : \ [t_0, t_1[\times B^p(-b, 0; E) \to E, \qquad \text{où} \quad t_0 \in \mathbf{R}, \qquad t_1 \in [t_0 + a, +\infty]$$

et

$$B^p(-b, 0; E) = E^N \times M^p(-b, 0; E).$$

Le *problème global de Cauchy* dans $[t_0, t_1[$ pour l'application f et la donnée initiale h au temps t_0 consiste à déterminer x dans $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ tel que $x(t_0) = h(0)$ et que l'application $\tilde{x}$ définie par

$$\tilde{x}(s) = \begin{cases} h(s - t_0), & s \in I(t_0 - b, t_0), \\ x(s), & s \in]t_0, t_1[\end{cases}$$

satisfasse l'équation

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(t, \tilde{x}(t + \theta_N), \ldots, \tilde{x}(t + \theta_1), \tilde{x}_t) \quad \text{p. p. dans } [t_0, t_1[,$$

où $\tilde{x}_t(\theta) = \tilde{x}(t + \theta)$, $\theta \in I(-b, 0)$. Un tel x est une *solution globale.*

Le *problème local de Cauchy* dans $[t_0, t_1[$ pour f et h consiste à déterminer un réel α, $0 < \alpha < t_1 - t_0$, tel que le problème de Cauchy dans $[t_0, t_0 + \alpha]$ ait une solution globale dans $AC^1(t_0, t_0 + \alpha; E)$ pour la donnée initiale h au temps t_0.

Nous écrirons M^p et C_{loc} au lieu de $M^p(-b, 0; E)$ et $C_{loc}(t_0, t_1; E)$. $M^p \circ C_{loc}$ sera le sous-espace linéaire fermé de tous les (h, x) dans $M^p \times C_{loc}$ tel que $x(t_0) = h(0)$. L'application $s \mapsto (h \circ x)_s : [t_0, t_1[\to M^p$ définie par

$$(h \circ x)_s(\theta) = \begin{cases} h(s - t_0 + \theta) & \text{pour} \quad \theta \in I(-b, 0) \setminus [-(s - t_0), 0], \\ x(s + \theta) & \text{pour} \quad \theta \in I(-b, 0) \cap [-(s - t_0), 0] \end{cases}$$

sera appelée *application mémoire* de $(h, x) \in M^p \circ C_{loc}$ et nous la dénotons par $h \circ x$.

A la lumière de cette dernière définition le problème global de Cauchy peut être reformulé comme suit. Étant donnés f et h le problème global de Cauchy consiste à déterminer un x dans $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ tel que l'application mémoire $h \circ x$ pour (h, x) dans $M^p \circ C_{loc}$ satisfasse l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, \sigma(h, x)(t)) \quad \text{p. p. dans } [t_0, t_1[,$$

où l'application

$$\sigma: \quad M^p \circ C_{loc} \to L^p_{loc}(t_0, t_1; B^p(-b, 0; E))$$

est définie par

$$\sigma(h, x)(t) = ((h \circ x)_t(\theta_N), \ldots, (h \circ x)_t(\theta_1), (h \circ x)_t).$$

3. Résultats. — Dans les théorèmes et corollaires suivants b, a, p, E, t_0, t_1, π_t, σ, h et f sont définis comme dans le paragraphe 2.

Théorème 1. — *Supposons que f ait les propriétés suivantes :*

(CAR-1) *L'application $t \mapsto f(t, z)$ est m-mesurable pour tout z dans* $B^p(-b, 0; E)$;

(LIP) *Il existe une fonction non négative n dans* $L^q_{loc}(t_0, t_1; R)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *tel que pour tous z_1 et z_2 dans* $B^p(-b, 0; E)$

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq n(t) \| z_1 - z_2 \|_{B^p}$$

p. p. dans $[t_0, t_1[$;

(BC) *L'application $t \mapsto f(t, 0)$ est un élément de* $L^1_{loc}(t_0, t_1; E)$.

Alors il existe une solution globale unique $\varphi(h)$ dans $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ *au problème de Cauchy. De plus, l'application*

$$h \mapsto \varphi(h): \quad M^p(-b, 0; E) \to AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$$

est continue et pour tout t dans $]t_0, t_1[$

$$\| \pi_t(\varphi(h) - \varphi(k)) \|_{AC^1} \leq d(p, t - t_0) \| h - k \|_{M^p}$$

pour une constante $d(p, t - t_0) > 0$. ■

Corollaire. — *Si $n \in L^q(t_0, t_1; R)$ et $t \mapsto f(t, 0)$ est dans $L^1(t_0, t_1; E)$ la solution $\varphi(h)$ est dans $AC^1(t_0, t_1; E)$.* ■

Théorème 2. — *Supposons que pour f et h :*

(CAR-1) *L'application $t \mapsto f(t, z)$ soit m-mesurable pour tout z;*

(CAR-2) *et que l'application $z \mapsto f(t, z)$ soit continue pour presque tout t dans* $[t_0, t_1[$;

(CAR-3) *Soit* V *un sous-ensemble convexe fermé et non vide de* $C_{loc}(t_0, t_1; E)$. *Supposons qu'il existe une fonction non négative m (dépendante de* V) *dans* $L^1_{loc}(t_0, t_1; R)$ *tel que*

$$(a)\quad V_m = \left\{ x \in C_{loc} \mid x(t_0) = h(0),\ \max_{[t_0, t]} |x(s) - h(0)| \leq \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds,\quad \forall t \in]t_0, t_1[\right\}$$ *soit un sous-ensemble de* V *et que*

$$(b)\ \textit{pour tout}\ x \in V_0 = \{ x \in V \mid x(t_0) = h(0) \},$$

$$|f(t, \sigma(h, x)(t))| \leq m(t) \quad p.p.\ dans\ [t_0, t_1].$$

Alors il existe au moins une solution globale $\varphi(h)$ *dans* $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ *au problème de Cauchy avec donnée initiale h au temps* t_0. ■

Corollaire. — *Si* $m \in L^1(t_0, t_1; R)$ *la solution globale est dans* $AC^1(t_0, t_1; E)$. ■

Théorème 3. — *Supposons que les hypothèses* (CAR-1) *et* (CAR-2) *pour f soient satisfaites. Soit* N(*h*) *un voisinage de h dans* $M^p(-b, 0; E)$. *Comme dans le théorème* 2 *nous supposons l'existence d'un sous-ensemble convexe fermé de* C_{loc} *et d'une fonction m non négative dans* $L^1_{loc}(t_0, t_1; R)$ *tel que les hypothèses* (*a*) *et* (*b*) *du théorème* 2 *soient satisfaites pour tout élément de* N(*h*). *Supposons enfin que la solution* $\varphi(h)$ *soit unique dans* $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$. *Alors pour toute suite* $\{h_n\}$ *dans* N(*h*) *convergente vers h il existe une sous-suite de solutions* $\{\varphi(h_{n_k})\}$ *dans* $AC^1_{loc}(t_0, t_1; E)$ *qui converge vers* $\varphi(h)$. ■

Les techniques utilisées pour prouver les théorèmes 1 et 2 s'inspirent de celles de A. Bielecki [2] et C. Corduneanu [3]. Ceci explique l'abréviation (BC) dans le théorème 1.

(*) Séance du 11 janvier 1971.

(1) S. Lang, *Analysis II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
(2) A. Bielecki, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, IV, 1956, p. 261-264.
(3) C. Corduneanu, *Funkcialaj Ekvacioj*, 9, 1966, p. 119-127.

(M. D. : *Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal* 101, *Québec, Canada;*
S. M. : *Electronic Systems Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts* 02139, *U. S. A.*)

183281. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.