Sombreros e Infinitos
Cómo garantizar resultados en una situación aleatoria

En la columna del mes de febrero presenté el problema siguiente. (No sé quién es su descubridor original; a mí me lo contó mi alumno Dan Greco.)

Infinitas personas (P_1, P_2, P_3, ...) forman una fila: P_1 está detrás de P_2, P_3, P_4, ...; P_2 está detrás de P_3, P_4, P_5, ...; y así sucesivamente. (Ver ilustración.) Cada uno de ellos tiene puesto o bien un sombrero rojo o bien un sombrero azul. Se utilizó un proceso aleatorio para determinar qué sombrero ponerle a cada persona. Nadie conoce el color de su propio sombrero, pero cada quien puede ver los colores de los sombreros de las personas que tiene delante. A una hora predeterminada, cada persona tiene que gritar o bien '¡rojo!' o bien '¡azul!'. (Los gritos tienen que ser simultáneos, de manera que nadie pueda utilizar lo que dicen los demás para decidir con qué color comprometerse.) A los que identifiquen correctamente el color de su sombrero se les perdonará la vida; a los demás se les cortará la cabeza.

Problema: ¿Qué estrategia podrían acordar de antemano P_1, P_2, P_3, ... para garantizar que muera a lo más un número finito de personas?

Sorprendente, existe una solución. En la columna de este mes veremos cómo funciona, pero antes quisiera explicar por qué el resultado es tan sorprendente.

Sabemos que se utilizará un procedimiento aleatorio para determinar qué sombrero ponerle a cada persona. Imaginemos que el procedimiento es el siguiente. Cada persona tiene a su lado a un 'asistente'. La persona cierra los ojos mientras su asistente tira una moneda. Si la moneda cae en cara, el asistente le pone un sombrero rojo; si cae en cruz, le pone un sombrero azul.

Supongamos, además, que se sabe que la probabilidad de que una moneda caiga en cara es exactamente 50%, y que esto es así independientemente de cómo hayan caído las otras monedas. Entonces el hecho de que una persona pueda ver de qué color son los sombreros de las personas que tiene delante *no le proporciona ninguna información* acerca del color de su propio sombrero. Mientras permanezca convencido de que el resultado de tirar una moneda dada es independiente del resultado de tirar las demás monedas, deberá asignarle una probabilidad del 50% a la posibilidad de que su sombrero sea rojo, independientemente de los colores de los sombreros que tiene delante.

De esto parece seguirse que ninguna de las personas puede tener una probabilidad de acertar de más del 50%. ¿Cómo es posible, entonces, que puedan arreglárselas para garantizar que sólo una minoría pequeñísima -- una parte finita de las infinitas personas que hay -- adivine mal?

He aquí una estrategia. Cada asignación posible de sombreros a personas puede representarse como una secuencia infinita de ceros y unos. (Un cero en la k-ésima posición significa que el sombrero de P_k es azul y un uno significa que es rojo.) Sea S el conjunto de todas estas secuencias.

S puede dividirse en 'órbitas'. Diremos que dos secuencias en S están en la misma órbita si y sólo si difieren sólo en un número finito de posiciones. Por ejemplo, la secuencia <0,0,0,0,...> y la secuencia <1,0,0,0,...> están en la misma órbita porque difieren sólo en la primera posición, pero la secuencia <0,0,0,0,...> y la secuencia <1,0,1,0,...> están en órbitas diferentes porque difieren en un número infinito de posiciones.

La estrategia consiste en que P_1, P_2, P_3, ... elijan de antemano un representante de cada órbita. (Los que sepan del tema reconocerán que aquí se presupone el Axioma de Elección.) Una vez que comience el ejercicio cada persona podrá ver los colores de las personas que tiene delante, y desconocerá sólo los colores de un número finito de sombreros. Esto significa que aunque la persona no sea capaz de determinar cuál es la asignación de sombreros que de hecho ocurrió, tendrá suficiente información para determinar cuál es la *órbita* a la que pertenece la asignación de sombreros que de hecho ocurrió. Llamemos *o* a esta órbita.

Para completar la estrategia, basta con que cada persona utilice el representante preseleccionado de *o* para decidir con qué color comprometerse: P_k gritará 'azul' si el representante de *o* tiene un cero en la *k*-ésima posición, y gritará 'rojo' si el representante de *o* tiene un uno en esa posición. Dado que el representante de *o* y la secuencia correspondiente a la asignación de sombreros que de hecho ocurrió están en la mima órbita, sabemos que difieren a lo más en un número finito de posiciones. Así que, siempre y cuando todos actúen de acuerdo con la estrategia, habrá sólo un número finito de personas que identifiquen incorrectamente el color de su sombrero. *Quod erat demonstrandum*.

En algún sentido hemos solucionado el problema: hemos identificado una estrategia que garantiza que no haya infinitas muertes. Pero hay otro sentido en el que la situación parece tan misteriosa como cuando comenzamos.

Antes habíamos visto que el hecho de que alguien conozca los colores de todos los sombreros que tiene delante no le proporciona ninguna información acerca del color de su propio sombrero. Uno pensaría, por tanto, que sin algún procedimiento que le permita adquirir información adicional acerca del color de su sombrero, la probabilidad de que una persona acierte no puede ser mayor al 50%. Y en la solución que propuse, nadie parece adquirir información relevante al color de su sombrero.

Es cierto que cuando las personas actúan de acuerdo con la estrategia de la solución, no están decidiéndose por un color al azar; están tomando su decisiones metódicamente. Claramente hay métodos que mejorarían la probabilidad de acertar (por ejemplo, el método de mirarse en un espejo, y tomar la decisión de acuerdo con lo que diga el espejo). El problema es que en el caso particular de la estrategia que propuse, no es claro por qué habría uno de mejorar sus probabilidades. Nótese, por ejemplo, que -- a diferencia del método del espejo -- lo que nuestra estrategia le recomienda hacer a una persona dada no depende del color de su sombrero. La persona hubiera recibido la misma recomendación aunque el color de su sombrero hubiera sido diferente (siempre y cuando los sombreros de las personas que tiene delante no cambien de color).

De hecho, es tentador pensar que P_k está en posición de razonar como sigue: "Estoy tomando mi decisión de acuerdo con la k-ésima posición del representante que escogimos de antemano para o. Pero no había ninguna razón para escoger ese representante en particular. Lo mismo hubiéramos podido escoger cualquier otro. Y hay precisamente tantas secuencias en o que tienen un cero en la k-ésima posición como secuencias que tienen un uno. Así que la probabilidad de que el representante que escogimos prediga correctamente el color de mi sombrero es del 50%."

Pero si resulta que la probabilidad de acertar utilizando la estrategia que propuse es del 50%, ¿cómo es posible *garantizar* que no habrá infinitas muertes? ¿No dependeríamos de la suerte?

Afortunadamente, el razonamiento de P_k es falaz. Aunque es cierto que en o hay tantas secuencias con un cero en la k-ésima posición como secuencias con un uno en esa posición, esto no basta para concluir que la probabilidad de terminar con una secuencia del primer tipo es del 50%, cuando uno elije al azar.

La probabilidad de terminar con una secuencia del primer tipo *no está definida*. Esto es porque cuando el número de opciones al que nos enfrentamos es infinito, las probabilidades dependen de la *geometría* de nuestro espacio de opciones. Y en el caso de o podrían utilizarse geometrías diferentes, y no tenemos ninguna razón para preferir una sobre las demás.

Como consecuencia de ello, tampoco está bien definida la probabilidad de que una persona identifique correctamente el color de su sombrero cuando utiliza la estrategia que propuse. No sería correcto decir, en otras palabras, que una persona *mejora* sus probabilidades de no morir cuando es parte de un grupo que utiliza la estrategia. Lo único que puede decirse es que sus probabilidades pasan de ser del 50% a no estar bien definidas.

Tal vez algún miembro del grupo se sienta aliviado de pensar que de las infinitas personas que hay en el grupo sólo un número finito -- una minoría pequeñísima -- morirá. Pero esa reflexión no debería ser tan reconfortante como parece. Pues aunque morirá sólo un número finito de personas, no hay ningún límite al tamaño que puede tener este número. Es cierto que a partir de algún lugar en la fila habrá una secuencia ininterrumpida de sobrevivientes, pero desde la perspectiva de una persona dada, la gran mayoría de los puntos en los que podría comenzar esa secuencia -- todas excepto un número finito -- quedan demasiado adelante para ofrecer algún consuelo.

Hemos visto que no es cierto -- contrariamente a lo que uno podría pensar -- que uno mejora sus probabilidades de sobrevivir cuando es parte de un grupo que utiliza la estrategia. Esto elimina una parte del misterio que rodea al problema, pues muestra que no tenemos que preocuparnos de que haya alguna persona cuya probabilidad de acertar sea mayor al 50% aunque no tenga información adicional acerca del color de su sombrero.

He de confesar, sin embargo, que no me parece haber llegado al fondo del asunto. Continuaré pensando en el problema.

Agustín Rayo es profesor asociado de filosofía en el Instituto Tecnológico de Massachusetts