

Optimal consistency errors for general shell elements

Dominique CHAPELLE ^a, Klaus-Jürgen BATHE ^b

^a Inria-Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

^b Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA

E-mail: Dominique.Chapelle@inria.fr; kjb@mit.edu

(Reçu et accepté le 2 mars 2001)

Abstract. We obtain estimates for the consistency errors arising in general shell element procedures, which are widely used in engineering practice. These estimates improve a previous result by the same authors. Moreover, numerical experiments indicate that these new estimates are optimal. Further, we introduce a modified procedure for which nominal convergence is recovered. These results are of much practical significance. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Estimations optimales de consistance pour les éléments de coques généraux

Abstract. Nous obtenons des estimations pour les erreurs de consistance présentes dans les éléments de coques généraux, qui sont très utilisés en pratique. Ces estimations améliorent un résultat précédent des mêmes auteurs. De plus, des tests numériques indiquent que ces nouvelles estimations sont optimales. Par ailleurs nous proposons une formulation modifiée qui permet de retrouver une convergence nominale. Ces résultats ont une portée pratique évidente. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Version française abrégée

Les modèles de coques de type Reissner–Mindlin (comme le modèle de Naghdi, voir [6,5,2]) comportent deux champs inconnus : le déplacement de la surface moyenne de la coque (notée \mathcal{S}), et la rotation des fibres matérielles normales à \mathcal{S} dans la configuration non déformée. Ces deux champs sont donnés sur \mathcal{S} , elle-même décrite par une carte $\vec{\phi}$ supposée régulière. La rotation sous forme linéarisée est représentée par un vecteur partout tangent à \mathcal{S} , c'est-à-dire orthogonal au vecteur normal unitaire \vec{a}_3 .

Cependant, en pratique les éléments finis de coques sont souvent formulés d'une toute autre manière. En particulier, dans les techniques appelées « *general shell elements* » on considère la structure comme un objet 3D dont la géométrie est approchée à l'aide d'un maillage défini par des nœuds situés sur la surface moyenne et en utilisant la carte approchée donnée par (1), où \mathcal{J} représente l'opérateur d'interpolation 2D associé aux fonctions de formes des éléments finis employés, et t désigne l'épaisseur de la coque supposée constante dans cette Note. La démarche isoparamétrique classique conduit alors à considérer les

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

déplacements 3D donnés par (2) et (3), où \mathcal{BC} est la notation générique qui représente les conditions aux limites essentielles (homogènes). En utilisant ces déplacements 3D discrets dans la formulation variationnelle de l'élasticité 3D linéarisée avec l'hypothèse supplémentaire (4), on peut alors montrer que la solution discrète est une approximation convergente de la solution d'un modèle de coque de type Reissner–Mindlin [3]. Cependant, dans la définition de \mathcal{V}_h on peut voir que le deuxième champ ne correspond pas «exactement» à un vecteur rotation car il n'est pas orthogonal à \vec{a}_3 . En fait, ceci crée une erreur de consistance qui est l'objet d'étude principal de cette Note.

On réalise l'analyse sur un problème-modèle qui contient la même source d'erreur de consistance sans difficulté technique superflue. On considère ainsi le problème consistant à chercher $\vec{\theta}$ dans \mathcal{R} (défini par (8)) et qui satisfait (5), avec (6) et (7). Ce problème est manifestement bien posé, et on peut en étudier l'approximation consistant à chercher $\vec{\theta}_h$ dans \mathcal{R}_h qui satisfait (9) avec (10). On remarque que \mathcal{R}_h n'est pas un sous-espace de \mathcal{R} , et on définit alors $\tilde{\mathcal{R}}_h$ par (11) où π est l'opérateur de projection sur le plan tangent. Ceci fournit maintenant un sous-espace de \mathcal{R} , et on étudie la formulation discrète alternative qui consiste à chercher $\vec{\tau}_h$ dans $\tilde{\mathcal{R}}_h$ satisfaisant (12) avec (13). Les deux formulations discrètes sont clairement équivalentes à travers les relations (14), et on s'intéresse donc à l'analyse de l'approximation fournie par la seconde, avec les erreurs de consistance provoquées par l'utilisation de a_h et f_h au lieu de a et f . Dans cette analyse on supposera que les erreurs d'interpolation sont en $O(h^k)$ pour la norme H^1 et en $O(h^{k+1})$ pour la norme L^2 . On obtient alors le :

THÉORÈME 1. – *For tout $\vec{\eta}_s$ suffisamment régulier dans \mathcal{R} , on a (17) et (18).*

Ces estimations de consistance sont d'ordre $O(h^2)$ au mieux, ce qui améliore un résultat précédemment obtenu par les auteurs [3], mais indique néanmoins un comportement sous-optimal pour des éléments finis de degré supérieur à 2. Pour éviter cette erreur de consistance, il faudrait pouvoir projeter le vecteur de rotation interpolé dans (2), mais la géométrie n'est pas exactement connue et donc on ne dispose pas au plan pratique de l'opérateur de projection. En revanche, on peut parfaitement utiliser l'interpolé des vecteurs normaux pour construire un projecteur approché, ce qui conduit à considérer (19) au lieu de (12). En utilisant le fait que $\vec{\eta} = \pi(\mathcal{J}(\vec{\eta}))$ pour tout $\vec{\eta} \in \tilde{\mathcal{R}}_h$, on peut alors facilement établir une estimation de consistance en $O(h^k)$.

Afin de déterminer si les estimations de consistance (17) et (18) sont optimales, nous avons réalisé des expériences numériques sur des éléments finis cubiques (et sur une version 1D du problème-modèle). On a considéré pour cela un quart du cercle unité, avec un second membre choisi de telle sorte que la solution exacte soit égale à $\sin(4\xi^1)$ fois le vecteur tangent unitaire pour $\xi^1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Les courbes de convergence sont données dans la figure 1 pour le schéma d'origine (12) et le schéma modifié (19). Ces résultats montrent clairement une erreur en $O(h^2)$ en norme H^1 pour le schéma d'origine, ce qui indique que les estimations de consistance ci-dessus sont optimales. De plus, la convergence du schéma modifié apparaît manifestement comme nominale.

1. Introduction

Shell models of Reissner–Mindlin type (such as the Naghdi shell model, *see* [6,5,2]) involve two unknown fields: the displacement of the shell midsurface and the rotation of the material fibers normal to the midsurface in the undeformed configuration. Both fields are given on the midsurface \mathcal{S} —a surface in the Euclidean space—or alternatively in the two-dimensional (2D) reference domain ω which is in one-to-one correspondence with \mathcal{S} via a smooth mapping $\vec{\phi}$ which we call the *chart*. The rotation—in its linearized form—is represented by a vector which is everywhere in the tangential plane to \mathcal{S} , namely orthogonal to \vec{a}_3 , the unit normal vector.

In engineering practice, however, shell structures are usually analyzed from a rather different perspective. In the *general shell element* approach (cf. [1]), the structure is considered as a three-dimensional (3D) body for which the geometry is approximated using a mesh defined by nodes located on the midsurface and with the mapping

$$\vec{x} = \mathcal{J}(\vec{\phi})(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathcal{J}(\vec{a}_3)(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in \omega, \quad \xi^3 \in \left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right], \quad (1)$$

where \mathcal{J} represents the 2D interpolation operator associated with the finite element shape functions, and t denotes the thickness of the shell assumed to be constant in this note, although the analysis can be extended to varying thickness. Note that, for the sake of simplicity, we also assume that $\partial\omega$ coincides with the finite element boundary. Following then a standard isoparametric approach, the 3D discrete displacements are obtained by considering variations of the nodal quantities that define the position vector, namely the nodal position vectors of the midsurface and the nodal normal vectors. Hence, the 3D finite element displacements are given by

$$\vec{V} = \vec{v}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{\eta}(\xi^1, \xi^2), \quad (\vec{v}, \vec{\eta}) \in \mathcal{V}_h, \quad (2)$$

with

$$\mathcal{V}_h = \{(\mathcal{J}(\vec{v}_s), \mathcal{J}(\vec{\eta}_s)) \mid (\vec{v}_s, \vec{\eta}_s) \in \mathcal{C}^0(\omega)^6, \vec{\eta}_s \cdot \vec{a}_3 \equiv 0\} \cap \mathcal{BC}, \quad (3)$$

and where \mathcal{BC} symbolically denotes the (homogeneous) essential boundary conditions enforced. Using these discrete 3D displacements in the variational formulation of isotropic linearized elasticity with the assumption that the stress in the transverse direction vanishes, that is,

$$\sigma_{33} \equiv 0, \quad (4)$$

it can be shown that the finite element solution approximates the solution of a Reissner–Mindlin type model [3]. However, from the above definition of \mathcal{V}_h , we can see that we do not have $\vec{\eta} \cdot \vec{a}_3 \equiv 0$, and indeed this orthogonality property only holds at the nodes, in general. Hence, the second component of an element of \mathcal{V}_h is “not exactly” a rotation field. In fact, this perturbation produces *consistency errors* which it is our purpose to evaluate in this Note.

2. Analysis of the consistency errors

Since our goal is to focus on the consistency errors introduced above, we construct a model problem that contains the same source of error but does not contain undue technicalities. We thus consider the problem: Find $\vec{\theta}$ in \mathcal{R} such that

$$a(\vec{\theta}, \vec{\eta}) = f(\vec{\eta}), \quad \forall \vec{\eta} \in \mathcal{R}, \quad (5)$$

with

$$a(\vec{\theta}, \vec{\eta}) = \int_{\omega} \left(\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \xi^2} \right) d\xi^1 d\xi^2, \quad (6)$$

$$f(\vec{\eta}) = \int_{\omega} \vec{p} \cdot \vec{\eta} d\xi^1 d\xi^2, \quad \vec{p} \in L^2(\omega)^3, \quad (7)$$

$$\mathcal{R} = \{\vec{\eta} \in H_0^1(\omega)^3 \mid \vec{\eta} \cdot \vec{a}_3 \equiv 0\}. \quad (8)$$

Clearly, this problem is well posed because the bilinear form a is coercive and bounded on the entire space $H_0^1(\omega)^3$ (not only on the rotation space \mathcal{R} , in fact) for the H^1 -norm, and because the linear form f is also bounded. We then consider the following approximation procedure:

Find $\vec{\theta}_h$ in \mathcal{R}_h such that

$$a(\vec{\theta}_h, \vec{\eta}) = f(\vec{\eta}), \quad \forall \vec{\eta} \in \mathcal{R}_h, \quad (9)$$

with

$$\mathcal{R}_h = \{\mathcal{J}(\vec{\eta}_s) \mid \vec{\eta}_s \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}^0(\omega)^3\}. \quad (10)$$

Noting that \mathcal{R}_h is not a subspace of \mathcal{R} we define

$$\tilde{\mathcal{R}}_h = \{\pi(\mathcal{J}(\vec{\eta}_s)) \mid \vec{\eta}_s \in \mathcal{R} \cap \mathcal{C}^0(\omega)^3\}, \quad (11)$$

where π denotes the projection of a vector onto the tangential plane. This now gives a subspace of \mathcal{R} , and we can introduce the alternative approximation procedure:

Find $\vec{\tau}_h$ in $\tilde{\mathcal{R}}_h$ such that

$$a_h(\vec{\tau}_h, \vec{\eta}) = f_h(\vec{\eta}), \quad \forall \vec{\eta} \in \tilde{\mathcal{R}}_h. \quad (12)$$

with

$$a_h(\vec{\tau}_h, \vec{\eta}) = a(\mathcal{J}(\vec{\tau}_h), \mathcal{J}(\vec{\eta})); \quad f_h(\vec{\eta}) = f(\mathcal{J}(\vec{\eta})). \quad (13)$$

The two above approximation procedures are clearly equivalent through the relations

$$\vec{\tau}_h = \pi(\vec{\theta}_h), \quad \vec{\theta}_h = \mathcal{J}(\vec{\tau}_h), \quad (14)$$

and we now proceed to analyse the approximation given by (12), with the consistency errors caused by the use of a_h and f_h instead of a and f , respectively. Throughout the analysis, we assume that we have $O(h^k)$ interpolation estimates in the H^1 -norm, and $O(h^{k+1})$ in the L^2 -norm (where, as usual, h denotes the supremum of all element diameters).

The consistency errors crucially rely on the following ‘‘superconvergence’’ estimates [3].

LEMMA 2.1. – For any $\vec{\eta}$ in \mathcal{R} ,

$$\|\mathcal{J}(\vec{\eta}) \cdot \vec{a}_3\|_{H^1(\omega)} \leq Ch \|\vec{\eta}\|_{H^1(\omega)}, \quad (15)$$

$$\|\mathcal{J}(\vec{\eta}) \cdot \vec{a}_3\|_{L^2(\omega)} \leq Ch^2 \|\vec{\eta}\|_{H^1(\omega)}. \quad (16)$$

We now derive the consistency estimates in the form needed in the first Strang lemma (cf., e.g., [4]).

THEOREM 2.2. – For any smooth $\vec{\eta}_s$ in \mathcal{R} ,

$$\inf_{\vec{\eta} \in \tilde{\mathcal{R}}_h} \left\{ \|\vec{\eta}_s - \vec{\eta}\|_{H^1(\omega)} + \sup_{\vec{\rho} \in \tilde{\mathcal{R}}_h} \frac{a(\vec{\eta}, \vec{\rho}) - a_h(\vec{\eta}, \vec{\rho})}{\|\vec{\rho}\|_{H^1(\omega)}} \right\} \leq Ch^{\min\{2, k\}} \|\vec{\eta}_s\|_{H^{\min\{3, k+1\}}(\omega)}, \quad (17)$$

$$\sup_{\vec{\rho} \in \tilde{\mathcal{R}}_h} \frac{|f(\vec{\rho}) - f_h(\vec{\rho})|}{\|\vec{\rho}\|_{H^1(\omega)}} \leq Ch^{\min\{2, k\}}. \quad (18)$$

Proof. – Set $\vec{\eta} = \pi(\mathcal{J}(\vec{\eta}_s))$. Writing, for any $\vec{\rho} \in \tilde{\mathcal{R}}_h$,

$$\begin{aligned} a(\vec{\eta}, \vec{\rho}) - a_h(\vec{\eta}, \vec{\rho}) &= a(\vec{\eta}, \vec{\rho}) - a(\mathcal{J}(\vec{\eta}), \mathcal{J}(\vec{\rho})) \\ &= a(\vec{\eta}, \vec{\rho} - \mathcal{J}(\vec{\rho})) + a(\vec{\eta} - \mathcal{J}(\vec{\eta}), \mathcal{J}(\vec{\rho})), \end{aligned}$$

the second term in the right-hand side is easily bounded in $O(h^k)$, and the key point in bounding the first term is to use an integration by parts over each element. By scaling arguments the integral of jump terms

on the edges is seen to be $O(h^k)$ and for the surface integrals we can then use (16), instead of (15). Finally, the estimate (18) is straightforward using (16). \square

These consistency estimates are at best of order $O(h^2)$, which improves the result previously obtained by the authors [3], but still indicates that the finite element procedure is sub-optimal for finite elements of degree higher than 2. Clearly, in order to circumvent this difficulty, we would like to project the interpolated rotation vector in (2). The difficulty is that the geometry is not known—hence neither is the projection operator—except at the nodes. However, we can use the interpolated normal vector $\mathcal{J}(\vec{a}_3)$ to define an approximate projection operator π_h , which leads to considering

$$a(\pi_h(\mathcal{J}(\vec{\tau}_h)), \pi_h(\mathcal{J}(\vec{\eta}))) = f(\pi_h(\mathcal{J}(\vec{\eta}))), \quad \forall \vec{\eta} \in \tilde{\mathcal{R}}_h, \tag{19}$$

instead of (12). Recalling that $\bar{\eta} = \pi(\mathcal{J}(\vec{\eta}))$ for any $\vec{\eta} \in \tilde{\mathcal{R}}_h$, it is straightforward to establish an $O(h^k)$ consistency estimate for this modified formulation.

3. Numerical experiments

In order to determine whether the above consistency estimates are optimal we have performed some numerical experiments on a cubic finite element scheme. The one-dimensional version of our model problem was implemented, which can be seen as a reduction of the problem when the geometry and the data (hence also the solution) are invariant by translation along one coordinate axis. Of course, this assumes slightly different boundary conditions from above, but the boundary conditions are not an issue in this analysis. We considered a quarter of the unit circle, with a loading designed so that the exact solution is known and given by $\sin(4\xi^1)$ times the unit tangential vector, for $\xi^1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. The convergence curves are shown in Figure 1 for the original scheme (i.e., discretized as in (12)) and the modified one (cf. (19)). The results clearly display an $O(h^2)$ asymptotic error for the original scheme, which indicates that the above consistency estimate is optimal. Furthermore, the convergence of the modified scheme confirms that nominal convergence can be recovered using the simple modification described.

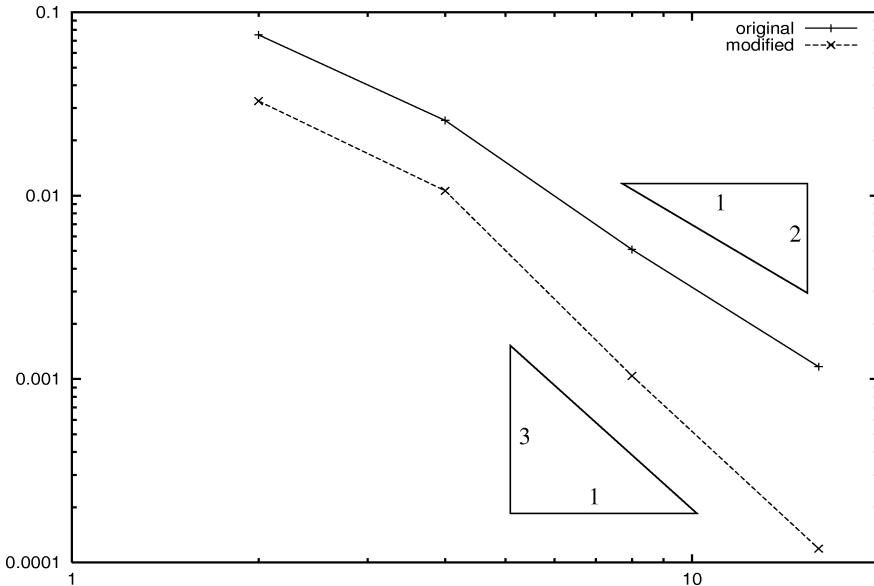


Figure 1. – Error in H^1 -semi-norm vs. number of elements.

Figure 1. – Erreur en semi-norme H^1 par rapport au nombre d'éléments.

References

- [1] Bathe K.J., Finite Element Procedures, Prentice-Hall, 1996.
- [2] Bernadou M., Finite Element Methods for Thin Shell Problems, John Wiley & Sons, 1996.
- [3] Chapelle D., Bathe K.J., The mathematical shell model underlying general shell elements, *Int. J. Numer. Methods in Engng.* 48 (2) (2000) 289–313.
- [4] Ciarlet P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, 1978.
- [5] Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, Vol. III: Theory of Shells*, North-Holland, 2000.
- [6] Naghdi P.M., Foundations of elastic shell theory, in: *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4, North-Holland, 1963, pp. 1–90.