Επαγωγή

Άγγελος Άσσος

21 Ιουνίου 2023

---

1 Ιντροτάκτιον

Το πιο δύσκολο πράγμα στην επαγωγή είναι να θυμάσαι να προσπαθείς το πρόβλημαμε επαγωγή. Για αυτό πάντα να τη δοκιμάζεται!
Μη ξεχνάτε επίσης ότι εσείς και μόνο εσείς διαλέγετε την επαγωγική υπόθεση! Και εκεί είναι που πολλές φορές κρύβεται το κόλπο! Για παράδειγμα αν θέλω να δείξω ότι $\sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$, αυτό έτσι όπως είναι δεν μπορεί να αποδειχθεί. Όμως θα δείτε ότι το να δείξετε ότι $S_N < 2 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}$ είναι πιο βατό.

2 Επαγωγή (σχεδόν) παντού

1. (Άλγεβρα) Έστω ότι $a_1, a_2, ..., a_n$ ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ για όλα τα θετικά ακέραια i, j. Νδο:

$$a_i + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n-1} \geq a_n$$

   για κάθε θετικό ακέραιο n.

2. (Θεωρία αριθμών) Νδ το Μικρό Θεώρημα του Φερμάτ (ακα $a^p \equiv a \pmod p$ για κάθε ακέραιο a και κάθε πρώτο p) με επαγωγή.

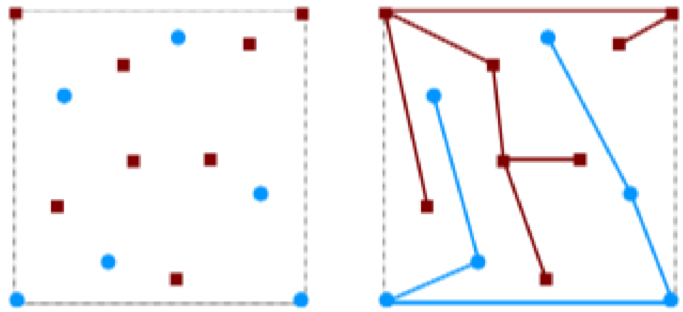
3. (Συνδυαστική, IOI 2005) Ένας αριθμός από κόκκινα και μπλε σημεία έχουν τις εξής ιδιότητες:

   (α΄) Οι πάνω αριστερά και δεξία γωνιές είναι κόκκινες.

   (β΄) Οι κάτω αριστερά και δεξία γωνιές είναι μπλε.

   (γ΄) Όχι 3 συνευθειακά.

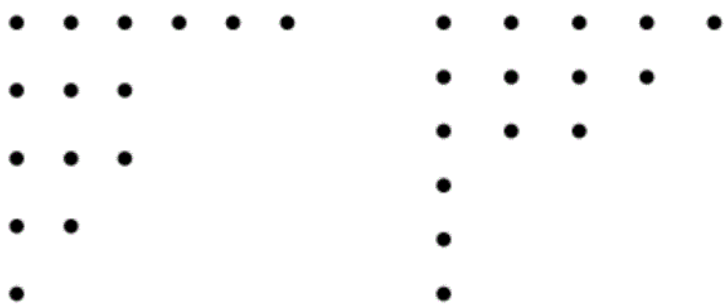
   Νδο ότι είναι πιθανών να ζωγραφίσω μπλε ευθ. τμήματα μεταξύ μπλε σημείων και κόκκινα ευθ. τμήματα μεταξύ κόκκινων σημέιων έτσι ώστε όλα τα κόκκινα σημεία να είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους (το ίδιο και τα μπλε), και να μην υπάρχουν ευθ. τμήματα που να τέμνονται.



Σχήμα 1: Ένα παράδειγμα

3 Ένα πιο μπλεγμένο πρόβλημα

Μια διαμέληση κάποιου αριθμού n είναι ενας τρόπος να γράψουμε το n σαν άθροισμα θετικών ακέραιων. Για παράδειγμα το 4 έχει 5 διαμελισμόυς (ποιους;).
Μπορούμε να αναπαραστήσουμε διαμελήσεις σε διαγράμματα Φερρέρ, όπως φαίνεται πιο κάτω.
Ορίζουμε ως αντίστροφη μίας διαμέλησης του n, έστω λ, ως την περιστροφή της λ ως προς την ευθεία $y = -x$ (αντιστρέφουμε γραμμές με στήλες).



Σχήμα 2: Μια διαμέληση για $n = 15$, (63321) και η αντίστροφη της, (543111)

Τέλος ορίζουμε, για δύο διαμελήσεις του n, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...), \mu = (\mu_1, \mu_2, ...)$, ότι $\lambda > \mu$ αν ισχύει:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \geq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k$$

, για κάθε θετικό ακέραιο k.
Νδο:

$$\lambda > \mu \text{ αν και μόνο αν } \lambda' < \mu'$$

4 Προβλήματα

1. Σε τετράγωνο $n \times n$ γράφονται n^2 διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Σου παίρνει ένα δεύτερο να διαβάσεις τον αριθμό που είναι γραμμένος σε ένα τετραγωνάκι. Νδο μπορέις να βρεις εναν αριθμό που είναι μικρότερος από τους γείτονές του(πάνω,κάτω, δεξιά, αριστερά) σε λιγότερο από $8n$ δεύτερα.

2. Νδο
$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$$
για όλους τους θετικούς ακέραιους n.

3. Έστω $n \geq 3$ ακέραιος. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_n$ θετικοί πραγματικοί έτσι ώστε:
$$n^2+1 > (t_1+t_2+...+t_n)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n})$$
Νδο τα t_i, t_j, t_k είναι πλευρές τριγώνου για κάθε i, j, k έτσι ώστε $1 < i < j < k \leq n$

4. (IOI 2014 πρόβμλημα $friends$)

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζευγάρι θετικών ακεραίων k και n, υπάρχουν k θετικοί α-κέραιοι $m_1, m_2, ..., m_k$ (όχι κατ΄ ανάγκη διαφορετικοί) τέτοιοι ώστε:
$$1+\frac{2^k-1}{n} = (1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})\ldots(1+\frac{1}{m_k})$$

6. Να προσδιορίσετε όλες τις συνασρτήσεις f από τους θετικούς ακέραιους στους θετικούς ακέραιους έτσι ώστε για κάθε a, b να υπάρχει μη τετιμμένο τρίγωνο:
$$a, f(b), f(b+f(a)-1)$$

5 Πολύ δύσκολα προβλήματα

7. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$, διαφορετικοί ανά δύο θετικοί ακέραιοι και έστω M ένα σύνολο που αποτελείται από $n-1$ θετικούς ακέραιους αλλά όχι τον $s = a_1+a_2+...+a_n$. Ένα τριζόνι αρχίζει να πηδά από το 0 του πραγματικού άξονα και προσπαθεί να φτάσει στο s κάνοντας n πηδήματα μήκους $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Νδο η σειρά των πηδημάτων μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να μην πατήσει σε κάποιο το σημείο του M.

8. Έστω $P = A_1A_2...A_k$ είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο επίπεδο. Οι κορυφές $A_1, A_2, ..., A_k$έχουν ακέραιες συντεταγμένες και βρίσκονται όλες πάνω σε ένα κύκλο. Έστω Σ είναι το εμβαδόν τουπολυγώνου Π. Δίνεται ένας περιττός ακέραιος ν τέτοιος ώστε τα τετράγωνα των μηκών των πλευρώντου πολυγώνου Π είναι ακέραιοι που διαιρούνται με τον αριθμό ν. Να αποδε-ίξετε ότι ο αριθμός 2Σ είναι ένας ακέραιος που διαιρείται με τον αριθμό ν

6 Υποδείξεις

Παραδείγματα:

1. Αν θεωρείς ότι ισχύει για $k < n$ τότε πρέπει να χρησιμοποιήσεις όλες τις εξισώσεις για $k < n$.

2. Δεν είναι δύσκολο. Έστω $a^p \equiv a \pmod{p}$. Τί μπορείς να πεις για το $(a+1)^p \pmod{p}$;

3. Ίσως το τετράγωνο δεν πολυβολεύει. Όταν βρεις το σχήμα που αρμόζει, προσπάθα να το χωρίσεις σε πιο μικρά σχήματα.

Προβλήματα:

1. Να διαιρέσουμε το τετράγωνο σε 4 $n/2 \times n/2$ τετράγωνα δεν φαίνεται να δουλεύει. Ίσως αν γενικεύσουμε σε $n \times m$ πλεκτό και μετά το χωρίσουμε, τα πράγματα να είναι καλύτερα..

2. Η κανονική επαγωγή δεν δουλεύει... Ίσως το πρόβλημα να είναι το $3n$.. ίσως μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με κάτι άλλο έτσι ώστε οι πράξεις να είναι καλύτερες.

3. Εοαγωγή... η πιο δύσκολη περίπτωση είναι όταν $n = 3$.

4.

5. Επαγωγή ... αλλά σε ποιο (n ή k); Έπειτα, ισως να πρέπει να το χωρίσεις σε περιπτώσεις.

6. Προσπάθησε να δοκιμάσεις κάποιες μικρές τιμές... η επαγωγή θα έρθει στο τέλος.

7. Επαγωγή στο n... Θέλουμε να διαγράψουμε το a_n (έστω το μεγαλύτερο από τα a_i), το s γίνεται $s' = s - a_n$. Υπάρχουν 4 περιπτώσεις...

8. Επαγωγή στον αριθμό των κορυφών του πολυγώνου... Ίσως το θεώρημα του Πτολεμαίου να φανεί χρήσιμο..