C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 1715-1718 (28 juin 1971). Série A

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations différentielles héréditaires affines.* Note (*) de MM. Michel Delfour et Sanjoy Mitter, présentée par M. Jean Leray.

Théorème d'existence et d'unicité et caractérisation de la commande optimale. Étude de l'opérateur de « feedback ».

1. Formulation du problème. — Cette Note fait suite à deux Notes précédentes [(1), (2)] sur les systèmes différentiels héréditaires. Nous supposerons donc connues les notations et définitions de ces dernières. Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert la transformation adjointe de $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ sera notée S^*. Soient H et K deux Hilberts et $(\ |\ )_H$ et $(\ |\ )_K$ leurs produits scalaires respectifs. Nous considérons le système affine à valeurs dans H :

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}(t) = A_{00}(t)\,x(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i(t)\,(h \circ x)_t(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(t, \theta)\,(h \circ x)_t(\theta)\,d\theta$$
$$+ B(t)\,v(t) + f(t) \quad \text{p. p. dans } [0, T] \quad \text{et} \quad x(0) = h(0),$$

où $h \in M^2(-b, 0; H)$, $f \in L^2(0, T; H)$, $B \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(K, H))$, A_{00} et A_i $(i = 1, \ldots, N)$ sont dans $L^\infty(0, T; \mathcal{L}(H))$, $A_{01} \in L^\infty(0, T; -b, 0; \mathcal{L}(H))$, et $v \in L^2(0, T; K)$ est la commande. La solution $x(\,.\,; h, v)$ de (1) existe, est unique et l'application $(h, v) \mapsto x(\,.\,, h, v) : M^2(-b, 0; H) \times L^2(0, T; K) \to AC^2(0, T; H)$ est affine et continue (2). Nous associons au couple (v, h) la fonction coût $J(v, h)$ donnée par

$$(2)\qquad (x(T; h, v) \mid F\,x(T; h, v)) + \int_0^T [(x(s; h, v) \mid Q(s)\,x(s; h, v)) + (v(s) \mid N(s)\,v(s))]\,ds$$
$$+ 2\int_0^T (v(s) \mid m(s))\,ds + 2\int_0^T (x(s; h, v) \mid g(s))\,ds,$$

où $g \in L^2(0, T; H)$, $m \in L^2(0, T; K)$, $F \in \mathcal{L}(H)$, $Q \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(H))$, $N \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}(K))$, F, Q$(s)$ et N(s) sont des transformations symétriques positives et il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $|(N(s)\,w \mid w)_K| \geq \alpha \|w\|_K^2$ pour tout $w \in K$ et $s \in [0, T]$. Puisque nous utilisons les espaces de Hilbert $M^2(-b, 0; H)$ et $AC^2(0, T; H)$ (1) nous pouvons donc résoudre ce problème par la méthode directe de Lions (3). Les seules modifications sérieuses proviennent de l'absence de la condition de coercivité pour les opérateurs A_{00}, A_i et A_{01}.

2. Existence et caractérisation de la commande optimale.

Théorème 1. — *Pour chaque* h *il existe une et une seule commande* u *qui minimise* $J(\varphi, h)$ *dans* $L^2(0, T; K)$. *La commande* u *est complètement caractérisée par l'identité*

$$u(s) = -N(s)^{-1}[B(s)^* p(s) + m(s)] \quad p.\,p. \text{ dans } [0, T],$$

où (p, x) *est l'unique couple solution dans* $AC^2(0, T; H)$ *du système suivant :*

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = A_{00}(t)\,x(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_i(t)\,(h \circ x)_t(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(t, \theta)\,(h \circ x)_t(\theta)\,d\theta \\ \qquad - B(t)\,N(t)^{-1}[B(t)^* p(t) + m(t)] + f(t) \quad p.\,p. \text{ dans } [0, T] \\ \text{et} \\ \qquad x(0) = h(0), \end{cases}$$

$$(4)\quad \frac{dp}{dt}(t) + A_{00}(t)^* p(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i(t - \theta_i)^* p_t(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(t - \theta, \theta)^* p_t(\theta)\,d\theta$$
$$+ Q(t)\,x(t) + g(t) = 0 \quad p.\,p. \text{ dans } [0, T] \quad \text{et} \quad p(T) = F\,x(T),$$

où, pour tout $y : [0, T] \to H$, $t \in [0, T]$ *et* $\theta \in I(-b, 0)$, $y_t(\theta)$ *est égal à* $y(t - \theta)$ *si* $t - \theta \leq T$ *et* 0 *si* $t - \theta > T$. ∎

3. Découplage et l'opérateur de « feedback » $P(s, \eta)$. — Nous posons

$$f'(t) = f(t) - B(t)\,N(t)^{-1}\,m(t) \qquad \text{et} \qquad R(t) = B(t)\,N(t)^{-1}\,B(t)^*.$$

Dans la proposition suivante il est implicite que pour un système défini dans $[s, T]$ l'application mémoire $(h \circ x)_t(\theta)$ est égale à $x(t + \theta)$ si $t + \theta \geq s$ et $h(t + \theta - s)$ si $t + \theta < s$.

Proposition 2. — *Soit* (x, p) *le couple solution du système* (3)-(4). *Alors pour toute pair* $s \leq t$ *dans* $[0, T]$:

$$(5)\qquad p(t) = D(t, s)\,(h \circ x)_s + d(t, s),$$

où $D(t, s)$ *et* $d(t, s)$ *sont définis par les règles suivantes :*

(i) *nous résolvons le système*

$$(6)\quad \frac{d\beta}{dr}(r) = A_{00}(r)\,\beta(r) + \sum_{i=1}^{N} A_i(r)\,(h \circ \beta)_r(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(r, \theta)\,(h \circ \beta)_r(\theta)\,d\theta$$
$$- R(r)\,\gamma(r) \quad p.\,p. \text{ dans } [s, T] \quad \text{et} \quad \beta(s) = h(0),$$

$$(7)\quad \frac{d\gamma}{dr}(r) + \sum_{i=1}^{N} A_i(r - \theta_i)^*\,\gamma_r(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(r - \theta, \theta)^*\,\gamma_r(\theta)\,d\theta$$
$$+ A_{00}(r)^*\,\gamma(r) + Q(r)\,\beta(r) = 0 \quad p.\,p. \text{ dans } [s, T] \quad \text{et} \quad \gamma(T) = F\,\beta(T),$$

alors $D(t, s)\,h = \gamma(t)$, $t \in [s, T]$;

(ii) *nous résolvons le système*

$$\frac{d\eta}{dr}(r) = A_{00}(r)\,\eta(r) + \sum_{i=1}^{N} A_i(r)\,(0 \circ \eta)_r\,(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(r, \theta)\,(0 \circ \eta)_r\,(\theta)\,d\theta \tag{8}$$

$$- R(r)\,\xi(r) + f'(r) \quad p.\,p.\ dans\ [s, T] \qquad et \qquad \eta(s) = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dr}(r) + \sum_{i=1}^{N} A_i(r - \theta_i)^*\,\xi_r\,(\theta_i) + \int_{-b}^{0} A_{01}(r - \theta, \theta)^*\,\xi_r\,(\theta)\,d\theta + g(r) \tag{9}$$

$$+ A_{00}(r)^*\,\xi(r) + Q(r)\,\eta(r) = 0 \quad p.\,p.\ dans\ [s, T] \qquad \text{et} \qquad \xi(T) = F\,\eta(T),$$

alors $d(t, s) = \xi(t)$, $t \in [s, T]$. ■

DÉFINITION 3. — Pour tout $s \in [0, T]$ et $\eta \in I(-b, 0)$, nous posons $P(s, \eta) = D(s - \eta, s)$ [resp. $r(s, \eta) = d(s - \eta, s)$] pour $\eta \in [s - T, 0] \cap I(-b, 0)$ et $P(s, \eta) = 0$ [resp. $r(s, \eta) = 0$] sinon. ■

PROPOSITION 4. — *Pour tout* $\eta \in I(-b, 0) \cap [-T, 0]$ *et pour tous* h *et* $\bar{h}$ *dans* $M^2(-b, 0; H)$ *l'application* $s \mapsto (\bar{h} \mid P(s, \eta)\,h) : [0, \eta + T] \to R$ *est continue.* ■

4. L'OPÉRATEUR $\Pi(s)$ ET LE MINIMUM DE LA FONCTION COÛT. — L'isomorphisme isométrique χ (1) entre $M^2(-b, 0; H)$ et $H \times L^2(-b, 0; H)$ permet de décomposer l'opérateur $P(s, \eta)$ comme $P(s, \eta)\,h = P^0(s, \eta)\,h^0 + P^1(s, \eta)\,h^1$, où $\chi(h) = (h^0, h^1)$, $P^0(s, \eta) \in \mathcal{L}(H)$ et $P^1(s, \eta) \in \mathcal{L}(L^2(-b, 0; H), H)$.

PROPOSITION 5. — *Soit* (β, γ) [*resp.* $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$] *le couple solution du système* (6)-(7) *dans* $[s, T]$ *correspondant à* h (*resp.* $\bar{h}$). *Alors l'expression*

$$(\bar{\beta}(T) \mid F\,\beta(T)) + \int_{s}^{T} [(Q(r)\,\bar{\beta}(r) \mid \beta(r)) + (\bar{\gamma}(r) \mid R(r)\,\gamma(r))]\,dr \tag{10}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, positive et elle peut s'écrire de façon unique sous la forme $(\Pi(s)\,\bar{h} \mid h)_{M^2}$ *pour* $\Pi(s) \in \mathcal{L}(M^2)$. *Elle peut aussi être décomposée comme suit :*

$$(\Pi^{00}(s)\,\bar{h}^0 \mid h^0) + (\Pi^{01}(s)\,\bar{h}^1 \mid h^0) + (\Pi^{11}(s)\,\bar{h}^1 \mid h^1)_{L^2} + (\Pi^{10}(s)\,\bar{h}^0 \mid h^1)_{L^2}, \tag{11}$$

où $\Pi^{00}(s) \in \mathcal{L}(H)$, $\Pi^{01}(s) \in \mathcal{L}(L^2, H)$, $\Pi^{11}(s) \in \mathcal{L}(L^2)$ *et* $\Pi^{10}(s) \in \mathcal{L}(H, L^2)$. *De plus les opérateurs* $\Pi^{00}(s)$ *et* $\Pi^{11}(s)$ *sont symétriques et positifs,* $\Pi^{01}(s) = \Pi^{10}(s)^*$ *et il existe* $c > 0$ *tel que* $\|\Pi(s)\,h\|_{M^2} \leq c\,\|h\|_{M^2}$, $s \in [0, T]$. ■

PROPOSITION 6. — *a.* $\Pi^{00}(s) = P^0(s, 0)$, $\Pi^{01}(s) = P^1(s, 0)$ et $(\Pi^{10}(s)\,h^0)(\alpha) = \Pi^{10}(s, \alpha)\,h^0$, où

$$\Pi^{10}(s, \alpha) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \begin{matrix} A_i(s + \alpha - \theta_i)^*\,P^0(s, \theta_i - \alpha), & \alpha + s - T < \theta_i \leq \alpha \\ 0,\ sinon & \end{matrix} \right\} \tag{12}$$

$$+ \int_{\max\{-b, \alpha + s - T\}}^{\alpha} A_{01}(s + \alpha - \theta, \theta)^*\,P^0(s, \theta - \alpha)\,d\theta.$$

b. Le noyau $\Pi^{01}(s, \alpha)$ *de* $\Pi^{01}(s)$ *est égal à* $\Pi^{10}(s, \alpha)^*$. ■

On montre aussi que $\Pi^{11}(s)$ peut être exprimé en fonction de $P^1(s, .)$. Si $f = g = 0$ et $m = 0$, le minimum de la fonction coût $J(v, h)$ en fonction de h est égal à $(\Pi(0)\,h \mid h)_{M^2}$.

La commande optimale u est donc obtenue par « feedback » de l'état $(h \circ x)_s$ et au temps $s \in [0, T]$, $u(s)$ est égal à

$$(13)\quad -N(s)^{-1}\left[B(s)^*\left[\Pi^{00}(s)\,x(s) + \int_{-b}^{0} \Pi^{10}(s, \alpha)^*\,(h \circ x)_s(\alpha)\,d\alpha + r(s, 0)\right] + m(s)\right],$$

où d'après la proposition 6, Π^{00} et Π^{10} ne dépendent que de P^0.

(*) Séance du 24 mai 1971.

(1) M. Delfour et S. Mitter, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 382.

(2) M. Delfour et S. Mitter, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 1109.

(3) J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

M. D. :
Centre de Recherches mathématiques,
Université de Montréal,
Montréal 101, *Québec, Canada;*
S. M. :
Electronic Systems Laboratory,
Massachusetts Institute of Technology,
Cambridge, Mass. 02139, *U. S. A.*

184150. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.