الزمر

تعريف: تتكون الزمرة من مجموعة غير خالية G مع عملية ثنائية $*: G \times G \to G$ تحقق الخصائص التالية:

1) يوجد **عنصر محايد** $e \in G$ يحقق
$$g * e = g = e * g \ \ \forall g \in G$$

2) تحقق * **الخاصية التجميعية**:
$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \ \ \forall \ g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{G}$$

3) يوجد لكل عنصر $g \in G$ **نظير** $g^{-1} \in G$ يحقق
$$g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$$

نقول أن الزمرة $(G,*)$ إبدالية إذا تحقق الشرط التالي
$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \ \ \forall \ g_1, g_2 \in \mathrm{G}$$

تعريف: لتكن $(G,*)$ زمرة، ولتكن $H \subseteq G$ مجموعة غير خالية. نقول أن H زمرة جزئية من G إذا كان
$$h_1 * h_2^{-1} \in H \ \ \forall \ h_1, h_2 \in H$$

نقول أن الزمرة الجزئية $H \subseteq G$ **ناظمية** إذا تحقق الشرط التالي
$$g * h * g^{-1} \in H \ \ \forall g \in G, h \in H.$$

في هذه الحالة يمكن تعريف علاقة تكافؤ على G:
$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in H.$$

وتكون مجموعة صفوف التكافؤ
$$\frac{G}{H} = \{[g] \ \mid g \in G\}$$

زمرة حيث تعرف عملية الضرب كما يلي:
$$[g_1]\,[g_2] = [g_1 * g_2]$$

مثال: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ فإننا نعرف **منقول المصفوفة** A على أنه المصفوفة $A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

لنعتبر مجموعة **المصفوفات العمودية الثنائية**:

$$O_2 = \{A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \mid A\,A^T = I = A^T A\}$$

لاحظ أولاً أن

1) عملية ضرب المصفوفات تجميعية
2) إذا كانت $A, B \in O_2$ فإن

$$(AB)(AB)^T = A(BB^T)A^T = AIA^T = I$$

3) $I \in O_2$
4) إذا كانت $A \in O_2$ فإن

$$1 = \det(\mathrm{I}) = \det(AA^T) = (\det(A))^2$$

ومن ذلك $\det(A) = \mp 1$. إذن A لها معكوس. علاوة على ذلك

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I^{-1} = I$$

إذن O_2 زمرة.

تعريف: لتكن $(G,*)$ و $(H,\cdot)$ زمرتين. نقول أن الراسم $f: G \to H$ تشاكل إذا حقق الشرط التالي

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) \;\; \forall \;\; g_1, g_2 \in \mathrm{G}$$

ونعرف **نواة** هذا التشاكل على أنها

$$Ker(f) = \{g \in G \;\mid f(g) = e_H\}.$$

نقول أن الزمرتين G و H **متشاكلتان تقابلياً** إذا وجد تشاكل تقابلي (1-1 و شامل) $f: G \to H$.

مثال: لنرجع لمجموعة **المصفوفات العمودية**

$$O_2 = \{A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \mid A\,A^T = I = A^T A\}$$

لاحظ أن

$$\det(-): (O_2,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^2\{0\},\cdot)$$

تشاكل بين الزمر وأن نواة هذا التشاكل هي مجموعة **المصفوفات العمودية الخاصة**:

$$Ker(f) = SO_2 = \{A \in O_2 \mid \det(A) = 1\}$$

تعريف: لتكن $(G,*)$ زمرة. يولد أي عنصر $g \in G$ زمرة جزئية **دورية** إبدالية من G هي

$$< g > = \{g^i \mid i = 0, 1, 2, \cdots\}$$

إذا وجد $g \in G$ بحيث يكون $G =< g >$ فإننا نقول أن G **مولَّدة** بوساطة g وتكون G في هذه الحالة **زمرة دورية**. نقول أن **رتبة العنصر** g هي n إذاكان n أصغر عدد طبيعي يحقق $g^n =$. إذا لم يوجد مثل هذا العنصر فإننا نقول أن رتبة هذا العنصر ∞. نرمز لرتبة العنصر g بالرمز $|g|$.

تمرين: نعرف **التقايس** على أنه راسم تقابلي (1-1 وشامل) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ يحافظ على المسافات، أي أن

$$d(P,Q) = d\big(f(P), f(Q)\big) \ \forall\, P,Q \in \mathbb{R}^2$$

نرمز لمجموعة هذه التقايسات بالرمز E. لتكن $W \subseteq \mathbb{R}^2$. نعرف مجموعة **تناظرات** W على أنها

$$Sym(W) = \{f \in E \mid f(W) = W\}$$

لاحظ أن $E = Sym(\mathbb{R}^2)$. أثبت أن E زمرة وأن $Sym(W) \subseteq E$ زمرة جزئية لكل $W \subseteq \mathbb{R}^2$.

- يمكن تمثيل E على شكل

$$E = \{(A,\vec{v}) \mid A \in O_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^2\}$$

ويمكننا تعريف عملية ثنائية:

$$*: E \times E \to E,\ (A,\vec{v}) * (B,\vec{w}) \mapsto (AB, A\vec{w} + \vec{v})$$

وذلك لأنه لكل $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$:

$$\big((A,\vec{v}) * (B,\vec{w})\big)(\vec{u}) = (A,\vec{v})\big((B,\vec{w})(\vec{u})\big) = (A,\vec{v})\big((B,\vec{w})(\vec{u})\big) = (A,\vec{v})(B\vec{u} + \vec{w}) = (AB\vec{u} + A\vec{w} + \vec{v}) = (AB + A\vec{w}, \vec{v})(\vec{u})$$

ما خصائص هذه العملية الثنائية:

1) العملية * تجميعية:

$$\big((A,\vec{v}) * (B,\vec{w})\big) * (C,\vec{u}) = (AB, A\vec{w} + \vec{v}) * (C,\vec{u}) = ((AB)C, AB\vec{u} + A\vec{w} + \vec{v})$$

$$(A,\vec{v}) * ((B,\vec{w}) * (C,\vec{u})) = (A,\vec{v}) * (BC, B\vec{u} + \vec{w}) = (A(BC), AB\vec{u} + A\vec{w} + \overrightarrow{v})$$

2) $(I,\vec{0})$ عنصر محايد

$$\big(I,\vec{0}\big) * (A,\vec{v}) = \big(IA, I\vec{v} + \vec{0}\big) = (A,\vec{v})$$

$$(A,\vec{v}) * \big(I,\vec{0}\big) = \big(AI, A\vec{0} + \vec{v}\big) = (A,\vec{v})$$

3) يوجد لكل عنصر $(A,\vec{v})$ في E نظير هو $(A^{-1}, -A^{-1}\vec{v})$:

$$(A,\vec{v}) * (A^{-1}, -A^{-1}\vec{v}) = (AA^{-1}, -AA^{-1}\vec{v} + \vec{v}) = \big(I,\vec{0}\big)$$

$$(A^{-1}, -A^{-1}\vec{v}) * (A,\vec{v}) = (A^{-1}A, A^{-1}\vec{v} - A^{-1}\vec{v}) = \big(I,\vec{0}\big)$$

نستنتج أن $(E,*)$ زمرة.

زمر الأرابسك

تعريف: زمرة الأرابسك هي زمرة جزئية $G \subseteq E$ تحتوي على انسحابين في اتجاهين غير متوازيين عبر متجهين غير صفريين $\vec{u}, \vec{w}$ بحيث نحصل على

$$\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid (I, \vec{v}) \in G\} = \{m\,\vec{u} + n\,\vec{w} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

تمثل مجموعة هذه المتجهات **شبكة** (**lattice**) في المستوى الديكارتي نرمز لها بالرمز $L(G)$. في هذه الحالة تشكل مجموعة الانسحابات زمرة جزئية $T(G) \subseteq G$.

تلعب الزمرة الجزئية $T(G)$ دوراً هاماً في تحديد نوع زمرة الأرابسك G، حيث أنها تحدد تماماً من خلال شكل القطعة المزخرفة الأصلية التي تستخدم نسخ منها في زخرفة المستوى الديكارتي. لذلك لا بد من أخذ شكل هذه القطعة بعين الاعتبار عند تحديد الأساس الذي سيتم اعتماده لتصنيف زمر الأرابسك.

تعريف: لتكن $G', G \subseteq E$ زمرتي أرابسك. نقول أن $G \approx G'$ إذا وفقط إذا وجد تشاكل تقابلي $f: G \to G'$ يحقق $f\big(T(G)\big) = T(G')$.

تعريف: لتكن G زمرة أرابسك. تعرف **زمرة النقطة** (**point group**) الخاصة بـ G على أنها

$$G_0 = \{A \in O_2 \mid \exists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t.} (A, \vec{v}) \in G\}.$$

حقيقة: G_0 زمرة منتهية.

تعريف: لتكن

$$U_2(\mathbb{Z}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \mid \det(A) = \pm 1\right\}.$$

نقول أن زمرتي النقطة G_0 و G_0' متكافئتان إذا كانت $G_0 \cong G_0'$ ووجدت $P \in U_2(\mathbb{Z})$ بحيث تكون

$$G_0' = PG_0P^{-1} = \{PAP^{-1} \mid A \in G_0\}$$

حقيقة: إذا كانت $G \approx G'$ فإن $G_0 \approx G_0'$ وَ $L(G) \cong L(G')$.

حقيقة: لتكن G زمرة أرابسك، وليكن n أكبر عدد طبيعي يحقق $R_{\frac{2\pi}{n}} \in G$.

1) إذا لم تحتو G_0 على أي انعكاس مرآة، فإن $G_0 \cong C_n$ (زمرة دورية):

$$G_0 = \{R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k = 0,1,\cdots,n-1\}$$

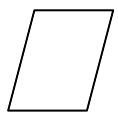
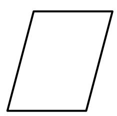
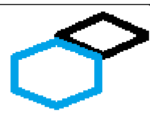
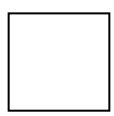
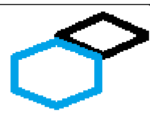
1) إذا احتوت G_0 على انعكاس مرآة، فإن $G_0 \cong Dih_n$ (زمرة ثنائية السطح):

$$G_0 = \{R_{\frac{2k\pi}{n}} \circ F^i \mid k = 0,1,\cdots,n-1\ ,\ i = 0,1\}$$

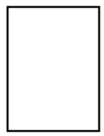
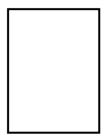
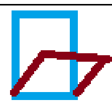
حقيقة: هناك 17 زمرة أرابسك غير متكافئة، بينها 9 متشاكلة تقابلياً، و 13 زمرة نقطة غير متكافئة.

دليل تصنيف زمر الأرابسك

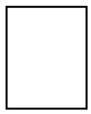
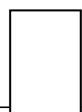
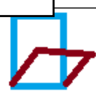
المجموعة الأولى: لا تحتوي G_0 على أي انعكاس.

ملاحظات		انعكاس تزحلقي غير تافه	انعكاس مرآة	أصغر زاوية دوران غير تافه	الشبكة		الاسم (الكامل)
		X	X	X		C_1	p1 (p111)
		X	X	π		C_2	p2 (p211)
		X	X	$\frac{2\pi}{3}$		C_3	p3 (p311)
		X	X	$\frac{\pi}{4}$		C_4	p4 (p411)
		X	X	$\frac{\pi}{3}$		C_6	p6 (p611)

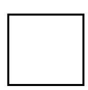
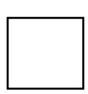
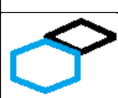
المجموعة الثانية: تحتوي G_0 على انعكاس وحيد. في هذه الحالة $G_0 \cong D_1 \cong C_1$

الاسم (الكامل)		**الشبكة**	**أصغر زاوية دوران غير تافه**	**انعكاس مرآة**	**انعكاس تزحلقي غير تافه**		**ملاحظات**
pm (p1m1)	$D_{1,p}$		X	عمودي	X		
pg (p1g1)	$D_{1,p}$		X	X	عمودي		
cm (c1m1)	$D_{1,c}$		X	عمودي	√		

- **المجموعة الثالثة: تحتوي G_0 على انعكاسين.**

محاور انعكاس المرآة		انعكاس تزحلقي غير تافه	انعكاس مرآة	أصغر زاوية دوران غير تافه	الشبكة		الاسم (الكامل)
محاور انعكاس المرآة متعامدة. تقع جميع مراكز الدوران بزاوية π على محاور الانعكاس		X	عمودي أفقي	π		$D_{2,p}$	pmm (p2mm)
		أفقية	عمودية	π		$D_{2,p}$	pmg (p2mg)
محاور الانعكاس التزحلقي متعامدة.		عمودي أفقي	X	π		$D_{2,p}$	pgg (p2gg)
محاور انعكاس المرآة متعامدة		√	عمودي أفقي	π		$D_{2,c}$	cmm (c2mm)

- **المجموعة الرابعة: تحتوي G_0 على أكثر من انعكاسين (3 – 4 - 6 انعكاسات).**

الاسم (الكامل)		الشبكة	أصغر زاوية دوران غير تافه	انعكاس مرآة	انعكاس تزحلقي غير تافه		ملاحظات
p3m1 (p3m1)	$D_{3,l}$		$\frac{2\pi}{3}$	عمودي	√		تقع جميع مراكز الدوران بزاوية $\frac{2\pi}{3}$ على محاور انعكاسات المرآة. لا توجد محاور انعكاس تكون زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور السينات الموجب. انعكاس في القطر الطويل للمعيَّن.
p31m (p31m)	$D_{3,s}$		$\frac{2\pi}{3}$	√	√		لا تقع جميع مراكز الدوران على محاور الانعكاس. لا توجد محاور انعكاس عمودية. توجد محاور انعكاس مرآة تكون زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور السينات الموجب. انعكاس في القطر القصير للمعيَّن.
p4m (p4mm)	D_4		$\frac{\pi}{2}$	عمودية	√		تقع جميع مراكز الدوران على محاور الانعكاس.
p4g (p4gm)	D_4		$\frac{\pi}{2}$	√	عمودية		لا تقع جميع مراكز الدوران على محاور الانعكاس.
p6m (p6mm)	D_6		$\frac{\pi}{3}$	عمودية	√		توجد محاور انعكاس تكون زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع محور السينات الموجب.

المراجع الرئيسة

[1] B. Grünbaum, *What symmetry groups are present in the Alhambra? Notices Amer. Math. Soc.* 53(6) (2006), 670–673.

[2] A. F. Costa, B. Gomez and J. Mora, *Arabesques and Geometry* (Springer Video Math), Springer 2000.

[3] K. Crithchlow, *Islamic Patterns. An Analytic and Cosmological Approach,* Thames and Hudson (2011).

[4] R. Pérez-Gómez, *The four regular mosaics missing in the Alhambra*, *Comput. Math. Appl.* 14 (2) (1987), 133–137.

[5] M. Lovric, *Magic geometry, mosaics in Alhambra*.

[6] E. Müller, *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada.* (German) *Thesis, University of Zürich,* 1944.

[7] S. R. Nagpaul and S. K. Jain, *Topics in Applied Abstract Algebra,* Thomson. Brooks/Cole (2005).

[8] F. RØnning, *Islamic patterns and symmetry groups,* *http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome24/ronning%20_geometry_and_Islamic_patterns.pdf*

[9] R. L. E. Schwarzenberger, *The 17 plane symmetry groups,* The Mathematical Gazette 58, 123 - 131 (1974).

[10] *Arabian Geometric Patterns,* The Pepin Press (2011).

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Arabesque

[12] http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/trans.html