بسم الله الرحمن الرحيم

أعزائي المشاهدين، السلام عليكم ورحمة لله وبركاته.

• في البداية، أود أن أعرف بنفسي. أنا د. جواد يونس أبو هليل، الأستاذ المشارك في قسم الرياضيات والإحصاء، جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، الظهران، المملكة العربية السعودية. تخصصي

الرئيس هو الجبر وتطبيقاته في الحياة العملية.

• في هذا الدرس المرئي سنحاول التعرف على ما يسمى زمر ورق الحائط أو الأرابسك. توجد بعض هذه الزمر في المساجد والمعابد في شتى أنحاء العالم، ولكن الجدير بالذكر أن جميع هذه الزمرموجودة في مكان واحد هو قصرالحمراء في الأندلس (غرناطة)

لنبدأ بالتعريف التالي: نعرف التقايس على أنه راسم تقابلي أي (1-1) وشامل من المستوى الديكارتي  إلى المستوى الديكاترتي  بحيث يحافظ على المسافات بحيث أن المسافة بين النقطة  والنقطة Q تساوي نفس المسافة بين صورة P وصورة Q وذلك لجميع النقاط P وQ في المستوى الديكارتي

نرمز لهذه التناظرات بالرمز E

إذا كانت W مجموعة جزئية من المستوى الديكارتي فإننا نعرف مجموعة التناظرات Wعلى انها مجموعة التقايسات في E بحيث تحقق أن صورة W تساوي W

لاحظ أن E تساوي مجموعة تناظرات المستوى الديكارتي وهي زمرة كما سنوضح لاحقاً وأن مجموعة تناظرات Wهي زمرة جزئية من E لكل زمرة جزئية من المستوى الديكارتي.

مارأيكم الآن بالقيام بالنشاط الأول؟

ستحاولون إيجاد التناظرات الخاصة بالدائرة.

مرحباً بكم من جديد

أرجو أن تكونوا قد وفقتم في إيجاد التناظرات الخاصة بالدائرة.

والآن لنرجع للسؤال التالي ماهي التناظرات الموجودة في المستوى؟ كما تلاحظون هنا لو أخذنا هذا المستطيل ورسمنا خطاً في منتصف هذا القوس بهذا الشكل فإن هناك تناظراً بين الجزء الأيسر للمستطيل بحيث يوجد إنعكاس مرآة وكأننا وضعنا مرآة مستوية في منتصف هذا القوس أيضاً لوسحبنا هذا المستطيل بهذا الاتجاه فإننا سنجد أنه سينطبق تماما على هذا المستطيل الآخر إذن في هذا الحائط يوجد تناظر آخر هو الإنسحاب إذن يوجد عندنا نوعان من التناظرات هما الإنسحاب والإنعكاس أو إنعكاس المرآة يوجد هناك تناظر آخر هو الدوران بزاوية بين 0 و 360 درجة عكس عقارب الساعة كما هو موضح في الشكل التالي إذن هذه الثلاثة أنواع الأساس في التناظرات: الإنسحاب ، الدوران عبر زاوية معينة، والإنعكاس أو ما يسمى إنعكاس المرآة . لاحظ ان حاصل تركيب أي تناظرين هو تناظر جديد، هناك نوع خاص ومميز من التناظرات ويسمى الإنعكاس التزحلقي وهو حاصل تركيب انعكاس مرآه يتبعه سحب موازي لمحور انسحاب المرآة كما هو موضح في الشكل التالي

السؤال الآن: هل توجد تناظرات لا يمكن الحصول عليها على شكل حاصل تركيب تناظرات أساس وهي الإنسحاب ، الدوران عبر زاوية معينة وانعكاس المرآة للإجابة على هذا السؤال نأخذ تناظراً عشوائياً  ولنفرض أن صورة الصفر في الصفر في هذا التناظر تساوي الصفر ميزة التقايس  هو انه يحافظ ليس فقط على الأبعاد وإنما على الزوايا ولذلك إذا كانت C تمثل دائرها مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r فإن صورة هذه الدائرة تحت هذا التناظر هي C نفسها أي نفس الدائرة نثبت الآن النقطة A r, وصفر على هذه الدائرة حيث rهو نصف قطر هذه الدائرة لاحظ أن أي نقطة Bعلى هذه الدائرة تحدد بواسطة الزاوية التي يصنعها OBمع OA افرض أن هذه الزاوية β لتكن تساوي  والزاوية التي يصنعها  مع هي α والزاوية التي يصنعها OBمعOA هي β حيث صورة B في هذا التناظر هي  ولأن يحافظ على الزوايا فإن هناك حالتين فقط الحالة الأولى الزاوية 

يمثل في هذه الحالة دوراناً بزاوية مقدارها α عكس عقارب الساعة

الحالة الثانية 

في هذه الحالة يمثل انعكاساً في القطر CDحيث الزاوية AOC هي  إذن هناك عدد الننهائي من التناظرات للدائرة تنقسم غلى قسمين رئيسين القسم الأول هو الدوران αبعكس عقارب الساعة والنوع الآخر هو الإنعكاس قي أحد أقطار الدائرة. لنرمز للانعكاس في محور السينات بالرمز F وليكن Lانعكاساً في القطر CD كما ترى فإن L يساوي حاصل تركيب الانعكاس في محور السينات متبوعاً بالدوران بزاوية مقدارها  بعكس عقارب الساعة .إذن يمكن الحصول على أي انعكاس في قطر من الأقطار كحاصل تركيب انعكاس في محور السينات مع تدوير مناسب نستنج من ذلك أن التناظرات للدائرة هي إما دوران بزاوية مقدارهاعكس عقارب الساعة أو الانعكاس في محور السينات أو حاصل تركيب الإنعكاس في محور السينات مع تدوير مناسب أما التناظرات في المستوى فنضيف إليها الانسحاب عبر متجه معين.

كما ترون هذا ما يسمى بالشماغ أو الكوفية أو غطاء للرأس يستعمله بعض الرجال في بعض الدول العربية مارأيكم بمحاولة إيجاد جميع التناظرات في هذه الكوفية

مرحباً بكم ثانيةً

هل يمكنك أن تتخيل وجود علاقة بين المصفوفات وهي أداة مهمة في علم الجبر وبين زمر الآرابيسك التي هي بالأساس متعلقة بالفن؟

في الحقيقة هناك علاقة وثيقة جداَ سنستعمل المصفوفات لإثبات أن مجموعة التناظرات في حوائط الأرابيسك هي عبارة عن زمرة

يعبر عن الإنسحاب عبر المتجه بواسطة الدالة

كما تلاحظ تحتوي الصورة التالية لأحد الجدران بقصر الحمراء على انسحابين في اتجاهين أحدهما أفقي والآخر عمودي

يمثل الدوران بزاؤية مقدارها عكس دوران عقارب الساعة بالمصفوفة

تحتوي زمرة الآرابيسك الخاصة بالصورة التالية التي تم التقاطها لجدار قصر الحمراء على دوران بزاوية مقدارها 90 درجة عكس عقارب الساعة

لنرمز بـ F للانعكاس حول محور السينات

إذا كانت  فإن  حيث أن 

فإنه يمكن تمثيل لخط الذي يصنع زاوية مقدارهامع محور السينات الموجب أي الدوران بزاوية مقدارها بعد الانعكاس في محور السينات بواسطة المصفوفة 

على سبيل المثال في صورة الآرابيسك لأحد جدران قصر الحمراء يوجد انعكاس مرآة في الخط الذي يصنع زاوية مقدارها 45 درجة مع محور السينات الموجب والذي يمكن تمثيله بواسطة المصفوفة 

لاحظ أن جميع المصفوفات التي تم استعمالها لتمثيل التناظرات تنتمي لمجموعة المصفوفات العمودية الخاصة وهي مجموعة المصفوفات الثنائية التي يكون حاصل ضرب هذه المصفوفة في منقولها هو مصفوفة الوحدة عل سبيل المثال  وهي مصفوفة عمودية خاصة وذلك لأن:

إذن يمكن تمثيل مجموعة التناظرات في المستوى بالشكل

ويمكننا تعريف عملية ثنائية

نسأل أنفسنا الآن ماهي خصائص هذه العملية الثنائية؟يمكنكم الرجوع إلى صفحة الإنترنت الخاصة بهذا الدرس المرئي لإطلاع على الحسابات التي تبين أن هذه العملية تجميعية، العنصر المكون من الزوج المرتب I والمتجه صفر هو عنصر محايد

يوجد لكل عنصر  في E نظير هو الزوج المرتب 

ماذا نستنتج؟

نستنتج أن هي زمرة

لننتقل الآن إلى النشاط الثالث

ارسم مثلثاً متطابق الأضلاع ثم حاول إيجاد جميع التناظرات الخاص بهذا المثلث المتطابق الأضلاع

هل تشكل مجموعة التناظرات هذه مجموعة جزئية من مجموعة التناظرات في المستوى؟

حاولوا الإجابة على هذين السؤالين وسنعود إليكم بعد قليل للإجابة على هذه التساؤلات.

أهلاً وسهلاً بكم مرةً أخرى

لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n تشكل مجموعة التناظرات لهذا المضلع المنتظم زمرة جزئية من مجموعة التناظرات في المستوى وعدد عناصرها 2n تكون هذه التناظرات من نوغين رئيسين هما الدوران والإنعكاس في محاور الإنعكاس

سنقوم الآن بتفصيل عناصر هذه الزمرة إذا كا نn عدداً فردياً فإن هنالك n من محاور الإنعكاس هي تلك الواصلة بين كل رأس ومنتصف الضبع الذي يقابله كما في حالة المثلث المتطابق الأضلاع

أما إذا كان n زوجياً فإن هنالك أيضاً n من محاور الإنعكاس نصفها يصل بين الرؤوس المتقابلة بينما يصل النصف الآخر بين منتصف كل ضلع والضلع المقابل له

سنقوم الآن بشرح تفصيلي لمثالين هما مثال المثلث المتطابق الأضلاع والمربع

لنبدأ بالمثلث المتطابق الأضلاع:

تتكون زمر التناظر لهذا المثلث المتطابق الأضلاع من نوعين أساسيين هما أولً الدوران بزاوية مقدارها 120 درجة ، 240 درجة،و360 درجة والتي تكافئ الزاوية صفر

أما النوع الآخر من التناظرات هي الإنعكاس في محور من المحاور وهناك ثلاثة محاور لإنعكاس.

الأول:يصل بين هذا الرأس ومنتصف الضلع الذي يقابله وكذلك بين هذا الرأس ومنتصف الضلع الذي يقابله و كذلك بين هذا الرأس ومنتصف الضلع الذي يقابله

إذن هنالك ستة تناظرات في زمرة التناظرات الخاصة بالمثلث المتطابق الأضلاع

أما بانسبة للمربع:

فهناك ثمانية تناظرات الدوران بزاوية مقدارها 90 درجة مع عقارب الساعة ،180 درجة ،270 درجة، 360 درجة والتي تكافئ الدوران بزاوية صفر

أما الإنعكاسات فهنالك أربع محاور انعكاس هل تستطيعون إيجادها؟

الأول يصل بين منتصف هذا الضلع ومنتصف الضلع الذي يقابله

الثاني الذي يصل بين منتصف هذا الضلع ومنتصف الضلع الذي يقابله

أما الثالث فيصل بين هذا الرأس والرأس الذي يقابله

أما الرابع فيصل بين هذا الرأس والرأس الذي يقابله

أربعة محاور انعكاس للمربع

إذن المجموع ثمانية تناظرات للمربع

إذن بشكل عام مجموعة التناظرات الخاصة بالمضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه n هي زمرة عدد عناصرها 2n نصفها دورانات أما النصف الآخر فهو انعكاس في محور من محاور الانعكاس التي عددها n لعلكم تتساءلون الآن لماذا التركيز على المثلثات المتطابقة الأضلاع والمربعات ؟

حسناً

هل يمكنكم إيجاد مضلعات منتظمة أخرى ممكن رصها جنباً إلى جنب على حائطٍ ما بحيث تغطي كل الحائط دون ترك أي فراغات ودون أي تداخل بينها؟

حاولوا الآن استخدام أشكال خماسية منتظمة أو سداسية منتظمة أو سباعية منتظمة لعمل ذلك

مرحباً بكم مرةً أخرى

من حقكم الآن التساؤل ماهي زمرة الآرابيسك؟

تعرف زمرة الآرابيسك على أنها زمرة جزئية من مجموعة التناظرات في المستوى تحتوي على انسحابين في اتجاهين غير متوازيين غبر صفريين يولدان شبكة L(G) مكونة من جميع المتجهات التي تدخل تشكيل تناظرات G في هذه الحالة تشكل مجموعة الانسحابات G زمرة جزئية يرمز لها بالرمز T(G)

يتبادر للذهن الآن التساؤل الهام التالي: كيف يتم تصنيف زمر الآرابيسك؟

لاحظ أن الزمرة الجزئية T(G) والمكونة من جميع الإنسحابات في زمرة الآرابيسك تلعب دوراً هاماً في هذا التصنيف حيث أنها تحدد شكل القطعة الأصلية التي يتم استخدامها لرص الحائط بقطع متشابهه من هذه القطع الأصلية

لتكن زمرتي أرابيسك نقول أن  (متكافئتان) إذا وفقط إذا تشاكل تقابلي يحقق أن 

نسأل أنفسنا الآن: ماهي الأشكال المحتملة لشبكة زمر الآرابيسك؟

توجد لدينا الإحتمالات التالية لوحدة البناء الأساس:

متوازي أضلاع قد يكون مائلاً وقد يكون معيناً وقد يكون مستطيلاً وقد يكون مربعاً وهنالك شكل مميز هو معين يكون أحد رؤوسه مركزاً لمستطيل يسمى المستطيل الممركز .

الحقيقة التالية مهمة في تصنيف زمر الآرابيسك وهي تنص على أن أصغر زاوية دوران غير تافه في أية زمر أرابيسك هي 180درجة أو 120درجة أو 90درجة 60درجة

ولإثبات ذلك

لنفرض أن لتكن النقطة P أحد مراكز هذا الدوران ولتكن النقطة Q مركزاً آخر للدوران  بحيث يكون طول القطعة المستقيمة PQ أقل ما يمكن



لاحظ أن 

الاحتمال الأول في هذه الحالة نحصل على مثلث متطابق الأضلاع وتكون n=6

في هذه الجالة تكون النسخة في الشبكة الأصلية 60 ,120

ويمكن الحصول على أشكال سداسية باستخدلم أطراف هذا المثلث المتساوي الأضلاع

الاحتمال الثاني:

 في هذه الحالة 

إذا كانت  في هذه الحالة  كما هو موضح بالشكل وهذا تناقض

أما في حالة n=5

فإن زاوية الدوران تساوي 72 درجة وبالتالي فإن 

وهذا تناقض لأن المسافة بين PوQ يجب أن تكون أقل ما يمكن

أما في حالة n=4 فإن زاوية الدوران هي 90 درجة وتكون النسخة الأصلية في الشبكة على شكل مربع

في حالة n=3 نكون زاوية الدوران 120 درجة وفي هذه الحالة تكون النسخة الأصلية للشبكة على شكل معين زواياه 120 درجة و60 درجة كما هو موضح بالشكل

أما في حالة n=2 فإن زاوية الدوران 180 درجة في هذه الحالة تكون النسخة الأصلية في الشبكة على شكل متوازي أضلاع

ما رأيكم بنشاطٍ جديد؟

هذا النشاط الخامس ستحاولون فيه إيجاد وحدة البناء الرئيسة وجميع التناظرات في الأشكال التالية.

مرحباً بكم في المقطع الأخير من هذا الدرس المرئي . كما هو واضح فإن هناك عدداً لا نهائياً من زمر الآرابيسك في العالم ولكن قد يتساءل البعض ماهو عدد زمر الآرابيسك غير المتكافئة؟ لقد أثبت العالم الروسي فيدوروف عام 1891 أن عدد هذه الزمر هو 17 زمرةً غير متكافئة ولقد قام العالمان بوليا ونجلي في عام 1924 بإثبات ذلك بصورةٍ مستقلة ليس من أهداف هذا الدرس المرئي تقديم إثبات لهذه الحقيقة ولكننا سنقوم بتقديم مثال لكيفية تصنيف زمرة آرابيسك وكيفية التعرف على نوع هذه الزمرة لنأخذ الصورة التالية لأحد الجدران بقصر الحمراء للتعرف على زمرة الآرابيسك الخاصة بهذه الصورة . نسأل أنفسنا عدة أسئلة أولاً: ماهي وحدة البناء لهذه الصورة؟ كما هو واضح فإن وحدة البناء الأساس هو معين زواياه 60 ,120 درجة

هل يوجد انسحابان في اتجاهين مختلفين؟ نلاحظ وجود انسحابين في اتجاهين مختلفين وبالتالي نحن بصدد وجود زمرة آرابيسك

ماهي زاوية أصغر دوران غير تافه أي غير الزاوية صفر؟

نلاحظ وجود دورانات غير تافهه بزاوية مقدارها 60 درجة كما هو موضح بالشكل التالي.

بالرجوع إلى الدليل الخاص بهذا الدرس المرئي على صفحة الإنترنت يتضح لنا أن هناك احتمالين لهذه الزمرة إما p611 أو P6mm ماهو الفرق بين هاتين الزمرتين؟

الزمرة p611 لا تحتوي على أية انعكاس مرآة بينما تحتوي p6mm على انعكاسات مرآة

هل توجد انعكاسات مرآة في هذه الصورة؟ هل تستطيعون إيجاد بعض انعكاسات مرآة إن وجدت؟

أحسنتم

توجد محاور انعكاس مرآة وبالتالي فإن زمرة الآرابيسك الخاصة بهذه الصورة هي p6mm

قد يتساءل البعض ماذا تعني هذه الرموز p6mm

P : وحدة بناء أساسية بدائية وليست مستطيلاً ممركزاً

6 :فيعني أن أصغر زاوية دوران غير كافي هي 

أما حرف m الأول: فيعني وجود انعكاس مرآة عمودي ويشار له باللون الأزرق الفاتح

أما حرف m الثاني: فيعني وجود انعكاس مرآة يصنع زاوية مقدارها 60 درجة مع محور السينات الموجب

لاحظوا أن محور السينات الموجب هنا هو الحد الأيسر للمعين والذي يشير نحو الأسفل محور الانعكاس هذا موضح باللون الأصفر وصلنا الآن إلى النشاط الأخير في هذا الدرس المرئي لنحاول أن نختم بلوحة للفنان الهولندي إيشر الذي استخدم الكثير من التناقضات في لوحاته ضائعة الصيت.

لتحاولوا الآن تصنيف زمر الآرابيسك الخاصة بهذه اللوحة

في الختام أتمنى أن أنكم قد استمتعتم بهذا الدرس المرئي وأن يكون مفيداً لكم والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.