درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

لماذا خلية النحل سداسية الشكل؟

Why a Beehive Honeycomb Has a Hexagonal Shape?

فاطمة القحطاني

سايتك -مركز سلطان بن عبد العزيز للعلوم و التقنية

المملكة العربية السعودية-الخُبر

(دقيقتان) الجزء الأول:

السلام عليكم و رحمة الله و بركاته، أهلاً بكم في هذا الدرس، أنا فاطمة القحطاني أعمل هنا في مركز سلطان بن عبد العزيز للعلوم و التقنية في مدينة الخبر في المملكة العربية السعودية.

و محاولته لفهم التصاميم العظيمة .ن الأمور من خلال تأمله في الكونتعلم الإنسان كثيراً م جعلته يصنع الطائرة من الطيور، و يصمم الطائرة المروحية بشكل يشبه إحدى والتي حوله عندما نلقي نظرة عن كثب داخل الحشرات الهوام، و اليوم سنستكشف أسرار خلية النحل، ف غيرة مقسمة تجميع العسل في عيون سداسية ص و وضع اليرقاتنجد أنه قد تم الخلية ؟ وكيف هندسة هذا الشكلما يجعلنا نتساءل كيف استطاع النحل بطريقة هندسية رائعة التي ة؟ كيف تمكنت النحلاليرقات الأفضل لحفظ الشكل السداسي هوأن النحلات عرفت ط ؟ وكيف استطاعت ضبع فقط من تنفيذ الحسابات الدقيقةتعيش ستة أسابي يقوم بتنفيذها على الإنسان أن ليس سهلاًالمقاييس التي؟

و سأعود حاولوا البحث عن الأسباب وراء اختيار النحل للشكل المسدس في بناء الخلية إليكم بعد قليل إن شاء الله.

)دقيقتان(الأول:النشاط

. الأسباب وراء اختيار النحل للشكل المسدس في بناء الخليةيقوم الطلاب بمناقشة

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

ي:)دقيقتان(الثانالجزء

فجذب ،اهتمام البشر ومهندستها المعماريةلقد أثارت خلية العسلمرحبا بكم مرة أخرى، تصميمها المذهل العديد من المهندسين ليقيموا مباني وناطحات سحاب مستوحاة من شكل الدقيق من أهم الجوانب التي شدت الاهتمام في عمل النحل هي القدرة على البناءوالخلية، ، البناء الذي قامت كل نحلة بوضع جزء من أجزائه، وذلك في انسجام كامل مع المعايير المتقن عن انحرافها أما ملم،(0.1)ها السداسية حوالي سماكة جدرانتبلغ فقد الهندسية المتسلسلة الهندسية في القواعدومن أجل استيعاب مدى دقة هذه ملم (0.002)لا يتعدى فالقدر الوسطي سنذكر أن النحل ،ولتوضيح ذلك نملك نظرة حسابية ورياضية عميقةبناء الخلية، يجب أن يستخدم هذه المسدسات لتخزين العسل و إسكان اليرقات، و اليرقة لها شكل قريب من ة كذلك تحتاج مقطعاً دائرياً لتدخل جسمها أثناء و ضع الأسطوانة، و مقطعها دائري و النحل العسل.

حاولوا رصف دوائر متساوية الحجم، في أصغر مساحة ممكنة من المستوي، مثلاً عشرون قطعة معدنية ضمن إطار صغير.

و ابحثوا عن شكل مضلع يمكنه الفصل بينها دون فراغات أو دون الكثير منها. و سأعود إليكم بعد قليل

)3 دقائق(:الثانيالنشاط

في أصغر مساحة ممكنة من المستوي، عشرون الحجم،رصف دوائر متساويةيقوم الطلاب ب قطعةمعدنية ضمن إطار صغيرنقدية.

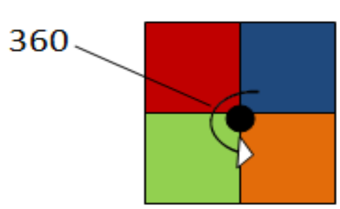
و يبحثون عن شكل مضلع يمكنه الفصل بينها دون فراغات أو دون الكثير منها.

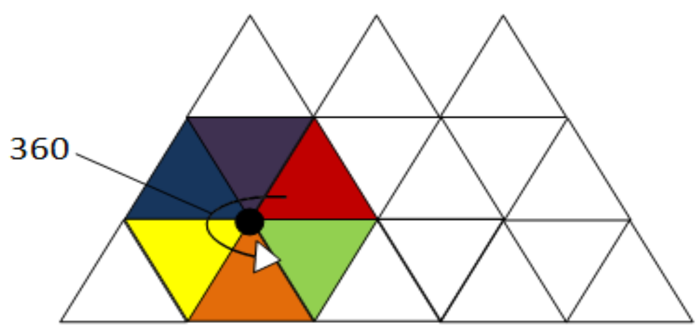
درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

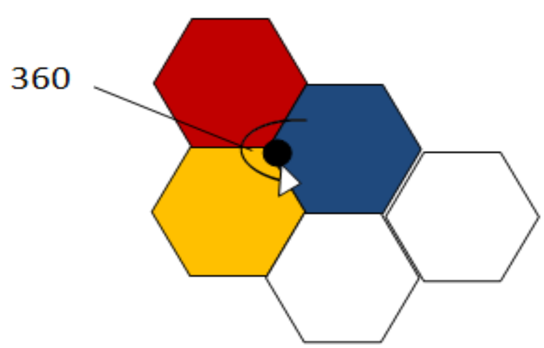
4(دقائق(:الثالثالجزء

حول بعضها، يكون حول كل دائرة ستة دوائر أخرى مماثلة ّرصُ الدوائر عندما تلعلكم وجدتم أن
نقاط تماسها لحصلنا على غة بينها و ذا وصلنا منتصف المناطق الصغيرة الفارإلها، و أننا
مضلع سداسي منتظم ندعوه المسدس

الدوائر هو المضلع الوحيد الذي يجمع-كما تبين لنا هندسياً–المسدس المضلع و لعل
ولكن كيف نستطيع أن نثبت ذلك ، بأقل قدر من المساحات البينية الضائعة)اليرقات(
تعريف مايسمى "بالمضلعات المنتظمة" إن المضلع المنتظم هو: أولأدعونا نتذكررياضياً؟
ما هو المضلع الذي تكون فيه أضلاعه متساوية في الطول وزواياه متساوية في القياس. والآن
ال يكون هناك مه بتكرار لتقسيم منطقة ما، بحيث ع المنتظم الذي يمكن أن نستخدالمضل
فراغات بين المضلعات)و بالتالي ليس هناك هدر لمساحة المنطقة تلك(
بالتالي استخدام و مع مراعاة أن يكون مجموع أطوال أضلاع تلك الأشكال المتراصة أقل ما يمكن)
أقل قدر من مواد البناء(
أن رغب في تقسيم منطقة كبيرة إلى مساحات صغيرة ينبغي على المضلعات المجاورة عندما ن
تلتحم جيداً ببعضها البعض دون أن تترك بينها مساحات فارغة، وكذلك ينبغي أن يكون
كما في الأشكال درجة (360) عند نقطة مشتركةجاورةت الممجموع الزوايا الداخلية للأضلاع
التالية:







درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

حيث n الواحدة في المضلع المنتظم هو: $\frac{180(n-2)}{n}$ الداخليةإن من المعلوم أن قياس الزاوية فيجب أن حول بعضها المتلاصقة المنتظمةمن المضلعات N لو كان لدينا الأضلاعتمثل عدد كما ذكرنا درجة (360) عند نقطة مشتركةجاورةت المللأضلاعمجموع الزوايا الداخلية يكون وبترجمة ذلك رياضياً نحصل على، سابقاً:

$$N\left[\frac{180(n-2)}{n}\right] = 360$$

$$\Rightarrow N\left[180(n-2)\right] = 360n$$

نحصل على المعادلة التالية: $360n$ وبقسمة الطرفين على

$$N\left[\frac{1}{2n}(n-2)\right] = 1$$

$$\Rightarrow N = \frac{2n}{n-2}$$

يمكن أن و n عمن بين عدد الأضلا N ما نحاول الوصول إليه هنا هو الحصول على العدد الصحيح عدد فقط، في حين لا يمكن الحصول على أي $n = 3,4,6$ نحصل على قيمة الأعداد الصحيحة في دون ترك أي ما أي إذا أردنا تقسيم منطقة)مرفق جدول إكسل(. 6 العددصحيح في أرقام ما فوق ، لا الشكل المثلث المتساوي الأضلاع أو المربع أو المسدسفراغ، فيجب علينا أن نستخدم درجة(360) و لا تكمل الخماسي المنتظم، لأن الأشكال الخماسية عند تكرارها تترك فراغات.

إن هذا ما هو إلا جزء من مشكلة تصميم النحل، لكن المشكلة الأخرى هي كيف يستطيع النحل اختيار الشكل المناسب من بين هذه الأشكال الثلاثة ليجمع يرقاته ذات القطاع الدائري داخلها ة هذه الأشكال الثلاثدون أن يهدر المساحة المعطاة له ويستفيد منها بأعلى قدر من الكفاءة؟أيّ أفضل، و كيف نتأكد من أنه الأفضل فعلاً؟

النشاط الثالث: (3 دقائق)

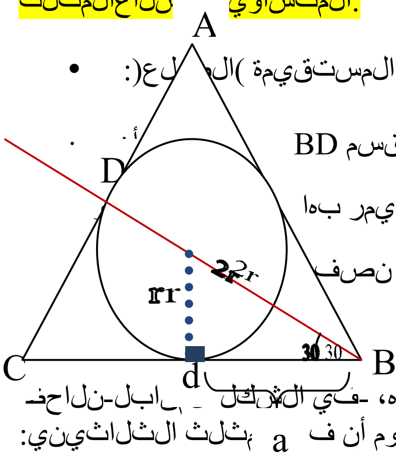
درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

هذه الأشكال الثلاثة أفضل، و كيف نتأكد من أنه الأفضل فعلاً، فكروا يناقش الطلاب أيّ في هذا السؤال بضعة دقائق و سنعود إليكم بعد قليل.

الجزء الرابع: (5دقائق)

يحوي كل منهم (و مربع و مسدس متساوي الأضلاع المثلث)سنقوم بحساب المساحة لكل من المتساوي الأضلاع فما هي مساحة المثلث إذا كان لدينا دائرة نصف قطرها r نفس الدائرة، أي إذ ، و لي أ(نريد حساب المساحة بدلالة المحتوي لها)الذي تكون تلك الدائرة مماسة لأضلاعه داخ أيها هو الأفضل)كمساحة(، ثم نقارن كذلك بالنسبة للمربع و المسدس

المثلث المتساوي الأضلاع:



- لنفرض أن طول القطعة المستقيمة)الضلع(: $BC = 2a$
- إلى نصفين متساويين الضلع AC هو الارتفاع الذي يقسم BD
- ينصف الزاوية التي يمر بها
- وأن نصف r

أنه تكوّن لدينا مثلث قائم الزاوية، في الشكل .... بالنسبة
ومن المعلوم أن في المثلث الثلاثيني:
= نصف الوتر 30 طول الضلع المواجه للزاوية

وبالتالي فإن = الوتر 2r

ومن نظرية فيثاغورس فإن : $(cB)^2 = (cd)^2 + (dB)^2$

وبالتالي فإن $(2r)^2 = r^2 + a^2$

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

$$\Rightarrow 4r^2 = r^2 + a^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 4r^2 - r^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 3r^2$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{3}r$$

وبما أن طول القطعة المستقيمة)الضلع($BC = 2a$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}r$$

من المعلوم أن مساحة المثلث المتساوي الأضلاع هي: $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (طول الضلع)^2

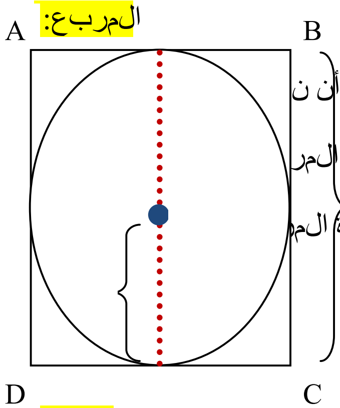
$$\therefore Area \ of \ \Delta ABC = (BC)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$Area = (2\sqrt{3}r)^2 (\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$Area = (4 \times 3 \times r^2)(\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$Area = 3\sqrt{3}r^2$$

المربع:



r من الشكل المقابل نلاحظ أن ن

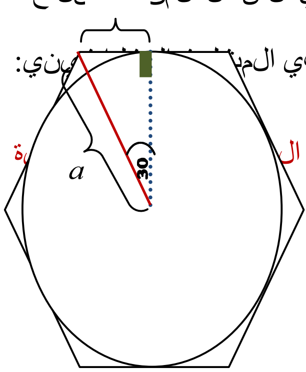
2r وبالتالي فإن طول ضلع المر

ومن المعلوم أن ^{2} ة الم

مسدس.

نلاحظ $\frac{a}{2}$ في الشكل المقابل أنه تتكوّن لدينا مثلث قائم الزاوية،

ومن المعلوم أن في المثلث ... يني:



ة ... الطول 30 نصف الوتر = = $\frac{a}{2}$

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

ومن نظرية فيثاغورس نجد أن :

$$a^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$$
$$\Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = r^2$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4}a^2 = r^2$$
$$\Rightarrow a^2 = \frac{4}{3}r^2$$
$$\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}r$$

وبإنطاق المقام فإن: $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$

$\because$: مساحة الشكل السداسي هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

$$\therefore Area = \frac{3\sqrt{3}}{2}(2\frac{\sqrt{3}}{3}r)^2$$
$$\Rightarrow Area = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\frac{4\times 3}{9})r^2$$
$$\Rightarrow Area = 2\sqrt{3}r^2$$

وبمقارنة المساحات للأشكال السابقة نجد أن الشكل السداسي هو المضلع المثالي الذي من حيث يجمع الدوائر بأقل قدر من المساحات البينية الضائعة. ولكن ماهو الشكل الأنسب علماً أن النحل يستخدم الشمع لإنشاء جوانب كل مضلع داخل أقل استهلاك لمواد البناء؟ الخلية.

ناقشوا هذا السؤال بضعة دقائق وسأعود إليكم بعد قليل

)3 دقائق(:الرابعالنشاط
الشكل الأنسب من حيث أقل استهلاك لمواد البناء؟عرفيناقش الطلاب طريقة م

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

3) دقائق(:الخامسالجزء

مربع و مسدس يحوي كل منهم نفس الدائرة، أي إذا كان مثلث و لكل من المحيطسنقوم بحساب المثلث المحتوي لها)الذي تكون تلك الدائرة مماسة و محيطفما ه r لدينا دائرة نصف قطرها ثم نقارن و ، و كذلك بالنسبة للمربع و المسدس r بدلالة المحيطلأضلاعه داخلياً(نريد حساب اء(أيها أقل هو الأفضل)كتوفير لمواد البن

من المعلوم أن محيط المضلعات المنتظمة يساوي مجموع أطوال أضلاعه أي: na

يمثل طول الضلع a تمثل عدد الأضلاع ، n حيث أن :

محيط المثلث المتساوي الأضلاعوبالتالي فإن $= 3(2\sqrt{3}r)$

$$= 6\sqrt{3}r$$

$$= 10.392r$$

محيط المربع$4(2r)$=

$= 8r$

محيط المسدس $= 6(\frac{2\sqrt{3}}{3}r)$

$= 4\sqrt{3}r$

$= 6.928r$

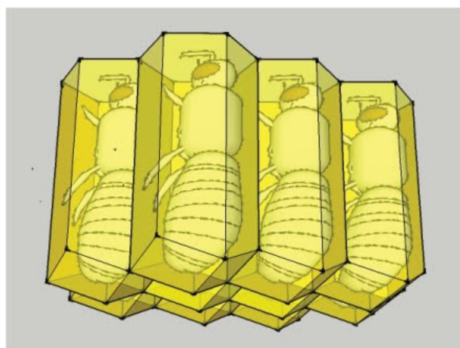
و هكذا وجدنا أن المسدس أفضل من ناحية المساحة و أقل حاجة لمواد البناء، و لهذا اختاره النحل نفس الجهد المبذول منليوفر الأماكن و يقلل إنتاج الشمع الذي يحتاج إنتاج كيلوغرام منه إلى كيلو غرام من العسل!10النحل لإنتاج

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

)6 دقائق(:السادسالجزء

هذا ماهو إلا وصف ثنائي الأبعاد لأقراص العسل، ولكن في الحقيقة مالا يعلمه معظم الناس أن الأبعاد الثلاثية لهيكلخلية النحل هي أكثر إثارة للإهتمام .

من الناحية التقنية فإن الوحدة الأساسية لقرص العسل هو نوع خاص من موشور سداسي قاعدته اعدته السفلى محدبة ومكونة من ثلاث معينات منحرفة عندما يتم لصق العديد العليا سداسية وق من هذه الوحدات الأساسية جنباً إلى جنب تتشكل خلية النحل بشكلها المعروف



أول من Giacomo Filippo Maraldi لقد كان الفلكي الفرنسي " جياكومو فيليبو ميرالدي" ، وخلص إلى أن الزوايا التي 1712أهتم بقياس الزاوية للوحدة الأساسية لهيكل العسل في عام إلى وأشار $70^\circ32'$ بين القواعد المعينية والموشور السداسي هي دائماً متسقة وتساوي بالضبط أن النحل قد استخدمت هذه الزاوية للحفاظ على بساطة البناء.

René Antoine Ferchault de Réaumur "ياء الفرنسي "رينيه أنطوان عالم الأح كان لولكن رأيٌ آخر في اختيار النحل لتلك الزاوية وافترض أن اختيارها كان من أجل الاقتصاد في كمية الشمع المستهلك لبناء الخلية.

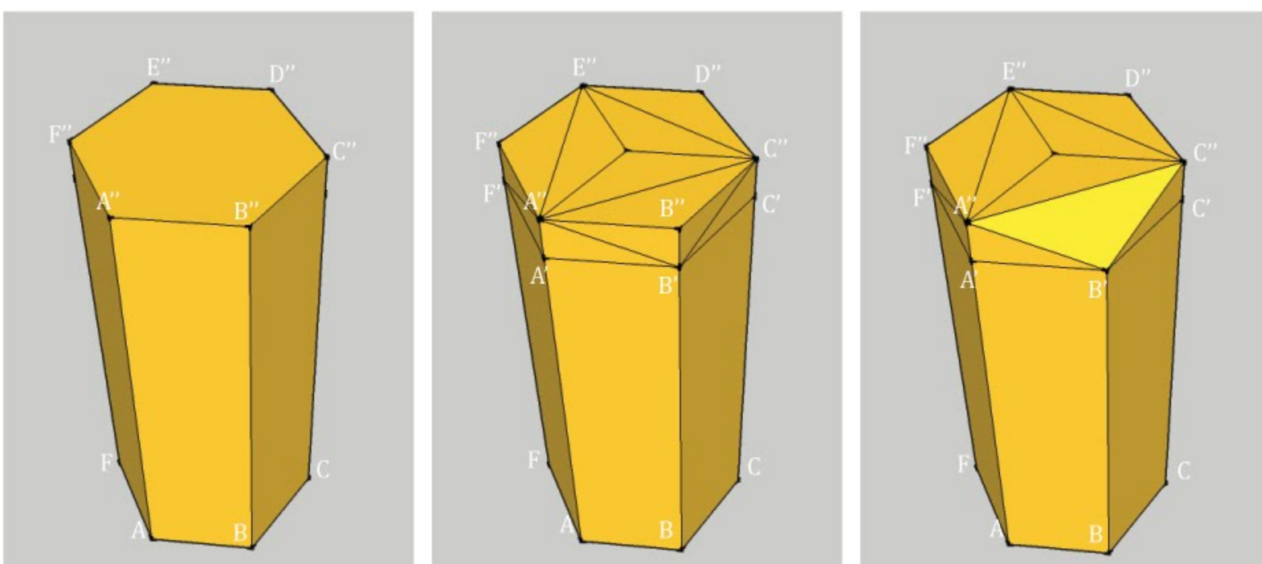
درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

وليثبت ما افترضه كتب إلى العديد من الرياضيين ليسألهم عن الزاوية الأكثر اقتصاداً التي تربط بين
يل على سؤاله، السويسري "يوهان صمووالموشور السداسي، ولكن واحد فقط هو من أجابالقواعد المعينية
$2'$ والتي لا تتفق مع نتيجة ميرالدي بنسبة $70°34'$ وكانت النتيجة **Johann Samuel König**كونيج"
"دقيقتين".

الحل من خلال طريقة **Colin Maclaurin** قدم عالم الرياضيات الاسكتلندي "كولن ماكلورين" **1743**وفي عام
وهذه $70°32'$ هندسية خلصت إلى أن الزاوية التي بين القواعد المعينية الثلاثة والموشور السداسي هي
ار إليها ميرالدي.النتيجة مماثلة لتلك التي أش

إثبات ، سنحاول $70°32'$ والآن بعد أن عرفنا أن الزاوية بين القواعد المعينية الثلاث والموشور السداسي هي
أن النحل توفر أكبر كمية من العسل عندما تكون قاعدتها العيا سداسية الشكل وقاعها محدب ومكون من ثلاث
معينات منحرفة بزاوية ميل $70°32'$.

السداسي ذو قاعدتين مسطحتين كما في الشكل التالي:لنفرض أن الموشور



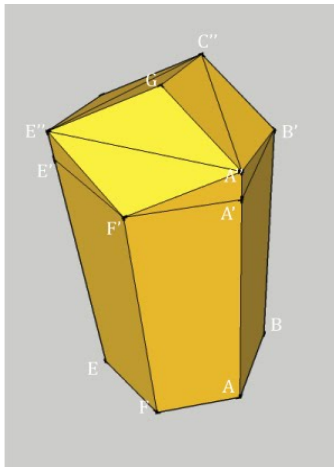
على الشكل التالي: V والحجم S_0 إذن يمكننا حساب مساحة السطح $AB = a\ ,\ A''A = b$ولنفرض أن

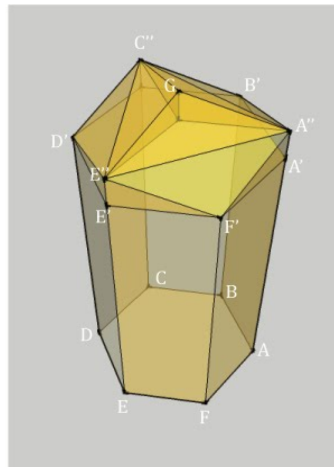
$$S_{\circ} = 6ab + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \, , V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 b$$

مروراً **A''C''**، الآن لنقم بقطع الشريحة الواصلة بين النقطتين $B'B'' = x$ولتكن المسافة بين النقطتين
شور. وب هذه الشرائح الهرمية لأعلى الم ثم نقلب ونعيد ترتيب**B'**بالنقطة

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

بثلاث معينات شورويينتهيالمسوف ،رر هذا الإجراءلكل من الجانبينالآخرين منالمنشورُإذاك هندسية منحرفة كما هو مبين أدناه:

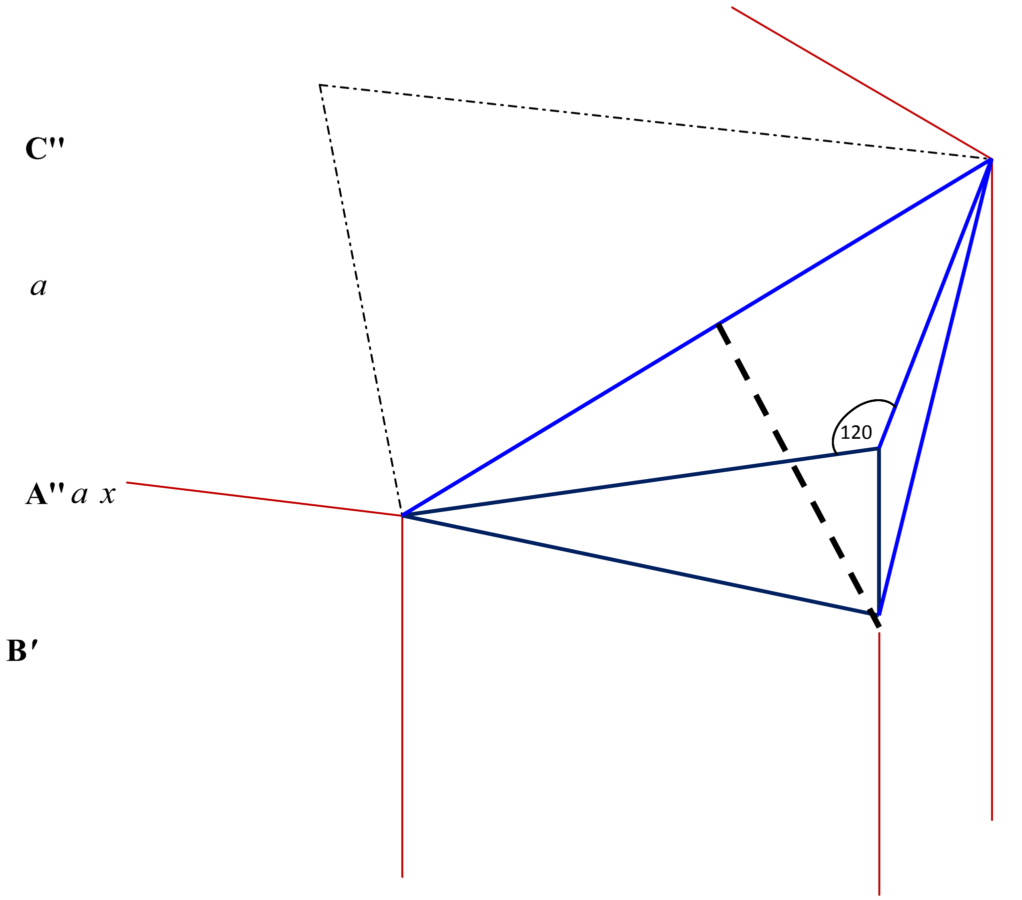




S_0 لم يتغير ولكن مساحة سطح هذا الموشور اختلف عن سابقه V نلاحظ أن الحجم تُعطى كالتالي : S_1 وبالتالي فإن مساحة السطح الجديد

$$S_1 = 6ab - 6(\frac{1}{2} ax) + 6(\text{Area of } \Delta \text{A}''\text{C}''\text{B}') \quad ....*$$

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم



طول الضلع الثالث غياث الدين الكاشي _ والتي تعطيلمو من نظرية الكاشي _نسبةً إلى الع
فيه أحد الزوايا والضلعين المكونين له بالعلاقة التالية: ففي مثلث معلوم

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

فإن:

$$A''C'' = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$

$$B'C'' = \sqrt{x^2 + a^2}$$

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميمي

$$\text{High of} \Delta A''C''B' = \sqrt{(B'C'')^2 - (\frac{1}{2}A''C'')^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

وبما أن مساحة المثلث تساوي: $\frac{1}{2} \times base \times high$ فإن:

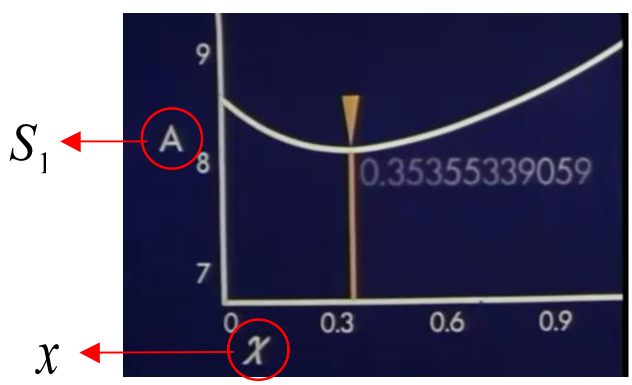
$$\text{Area of } \Delta A''C''B' = \frac{1}{2}\sqrt{3}a\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

لتعويض في المعادلة (*) أعلاه نجد أن: اوب

$$S_1 = 6ab - 6(\frac{1}{2}ax) + 6(\frac{1}{2}\sqrt{3}a\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}})$$

$$\Rightarrow S_1 = 6ab - 3ax + 3\sqrt{3}a\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

1 ثابت وكافٍ ولنفرضه يساوي b وارتفاعه 1 ثابت ولنفرضه يساوي a حرف المسدس وبفرض أن وحسبنا المساحة .... $0,0.1,0.2,0.3,0.4,$ لتحديد مكان القطع مثل: x وإذا قمنا بإعطاء قيم مختلفة ل- $0.3,0.4$ ومثلناها بمنحنى بياني سنجد أن قيمة المساحة أقل ما يمكن أي أكثر توفير للشمع بين



تُعطى على هذا النحو والتي S_1 و $S_\circ$ ل- الفرق بين المناطق السطحية لمعرفة ذلك بالتحديد نوجد

$$\Delta S(x) = S_0 - S_1$$

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + 3ax - 3\sqrt{3a}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$$

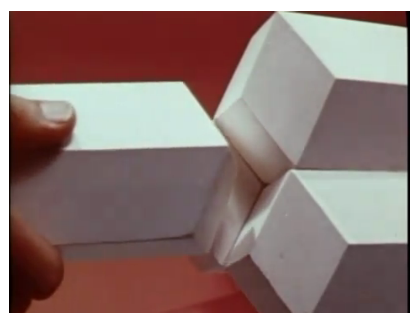
نعين المشتقة الأولى لـ ΔS ثم :

$$\Delta S'(x) = 0$$

$$3a - 3\sqrt{3}ax(x^2 + \frac{a^2}{4})^{-\frac{1}{2}} = 0$$

بربط هذه القيمة و $x = 0.35355339$ فإن قيمة $a = 1$ وحيث أن ، $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ والحل لهذه المعادلة هو
بالعملية الهندسية لخلايا العسل سوف نفهم لماذا اختار العسل الزاوية $70^{o}32'$.

بل إن الشكل الهندسي البارع للنحل قابل للتراكب مع أمثاله دون فراغات، وبشكل ليس هذا كل شيء متخالف بحيث يصبح مركز الخلية مدعماً بثلاثة جدران خلفه ما يعطيه متانة كبيرة واستهلاكاً للشمع بأقل كمية ممكنة.



والآن ألا توافقوني الرأي بأن النحل من أمهر المهندسين وأكثرهم براعةً على سطح هذا الكوكب؟
آمل أن تكونوا قد استمتعتم بهذا الدرس فقد كان من دواعي سروري أن أقدمه

درس البلاسومز المرئي التفاعلي
التصميم