بسم الله الرحمن الرحيم

.جامعة الملك فهد للبترول والمعادن من **محمد زهير أبوصبيح**أنا الدكتور

أحييكم أعزائي الطلبة وأرحب بكم أجمل ترحيب إلى هذا الدرس من دروس البلوسوم وأرجو أن تكونوا مفعمين بالحيوية والنشاط.

لدينا اليوم مسألة مشوقة وحافلة بالتحديات دعما للمهارات التي تعلمتموها في المدرسة، هذه . وستكون مختلفة عما تعلمتموه في الجبر والهندسة والحساب المواضيع التي سنناقشها اليوم هي جزء من نظرية في الرياضيات تسمى نظرية الرسوم، في مجال الدوائر الكهربائية وهذه النظرية لها تطبيقات عديدة في والكومبيوتر ووضع برامج الطائرات وجدولة الطائرات والقطارات.

لنبدأ بمثال بسيط:لدينا ثلاث محطات؛ محطة كهرباء ومحطة ماء ومحطة غاز ويقابلها ، ثلاث منازل. ونريد توصيل خط كهرباء وخط ماء وخط غاز لكل من هذه المنازل الثلاث. هل نستطيع عمل ذلك بدون أن تتقاطع الخطوط ؟

أرجو أن تقوموا بهذه التجربة مع زملائكم في الفصل لنرى إذا كان بإمكانكم توصيل المحطات الثلاث بالمنازل الثلاث بدون أن تتقاطع الخطوط .

سوف ألقاكم إن شاء الله بعد قليل

النشاط الأول

أهلا بكم أعزائي الطلبة ولنرى هل استطعتم توصيل المحطات الثلاث بالمنازل الثلاث .

فماذا لو كان هناك أكثر من ثلاث محطات .واب أن ذلك يستحيل فوق سطح الأرضوالج . لنمثل المسألة مسألة ستكون أكثر تعقيدا وصعوبةوأكثر من ثلاث منازل فإن ال رياضيا.ً

فمثلا لو مثلنا المحطات الثلاث بثلاث نقاط في المستوى لنسميها S_1 , S_2 , S_3 عمله هو توصيل كل محطة وما نريد H_1 , H_2 , H_3. ثلاث نقاط ب مثلهاوالمنازل الثلاث ن من هذه المحطات بالمنازل الثلاث. وكما تعلمون أن الأنابيب أو الأسلاك الكهربائية لا تسير في خطوط مستقيمة دائما وقد تكون متعرجة . مثلا هذا يصل بهذا ،وهذا يصل بهذا . الشكل الناتج يسمى رسما ويتكون من مجموعة من الرؤوس: ثلاثة في الأعلى تمثل المحطات ،وثلاثة في الأسفل تمثل المنازل ومجموعة من الخطوط تسمى الأضلاع .

ونعرف الرسم G بشكل عام على أنه يتكون من مجموعتين V مجموعة من الرؤوس ومجموعة E من الأضلاع أخرى بحيث أن كل ضلع يصل بين رأسين مختلفين .

لنأخذ مثال على ذلك، في هذا الرسم المرسوم أمامكم يوجد عندنا مجموعة من الرؤوس

$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$

إذن تتكون مجموعة الرؤوس من $V = \{V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 , V_6\}$ كما أن هناك مجموعة من الأضلاع أي مجموعة الأضلاع $e_1, e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7 , e_8$.

$E = \{e_1, e_2 , e_3 , e_4 , e_5 , e_6 , e_7 , e_8\}$

إذن هذا الرسم يتكون من مجموعتين من الرؤوس والأضلاع كما ترون في الشكل.

إذا وصل ضلع بين رأسيين V_1 و V_6 مثلا، أو e_2 بين رأسيين V_2 و V_5 نكتب $e_1 = V_6 V_1$.

وكذلك $e_2 = V_2 V_5$.

والآن أريد منكم أن ترسموا رسما مكونا من خمسة رؤوس وعشرة أضلاع بحيث لا يربط أكثر من ضلع واحد بين رأسيين مختلفين. قارن الرسم الذي حصلت عليه مع زملائك في المجموعة لنرى هل حصلتم على نفس الرسم أم لا.

ألقاكم بعد قليل.

على توقع أنكم حصلتم على نفس الرسم وكما ترونأهلا بكم أعزائي الطلبة وأ هناك خمسة رؤوس " بحيث أن **الرسم التام** يسمى"و k_5 هذا الرسم يدعى ،السبورة ويصل بين كل رأسيين مختلفين ضلع واحد فقط .

ويحتوي k_n بشكل عام هناك مجموعتين مهمتين من الرسوم ؛ الأولى تسمى الرسم التام يصل بين كل رأسيين فيها ضلع واحد. وكذلك هناك n على مجموعة من الرؤوس عددها يتكون من **الرسم الثنائي التام**مجموعة أخرى مهمة وهي الرسم الثنائي التام. (B) ومجموعة أخرى ولنقل أنها (A)المجموعة الأولى ولنقل أنها من الرؤوس؛ مجموعتين المجموعة بحيث يصل بين كل رأس في المجموعة الأولى ضلع واحد مع كل رأس في الثانية . هكذا .

من الرؤوس n من الرؤوس في المجموعة الأولى و mهذا الرسم بشكل عام إذا كان عندنا في المجموعة الأخرى فيكون الرسم الثاني التام يسمى $K_{n,m}$.

الرسم رسما متصلا إذا كان يصل وهناك خاصية أخرى للرسوم وهي الاتصال . نسمي بين أي رأسيين في هذا الرسم إما ضلع واحد أو مجموعة من الأضلاع المتتالية وتسمى **مسارا**هذه الأضلاع المتتالية المختلفة تسمى.

المرسوم على هذه السبورة ؛ نلاحظ أنه بين أي رأسيين نأخذهما G لنأخذ مثلا الرسم يوجد أكثر V_4 و V_1 يصل بينهما بينما e_6والضلع V_2 V_1نجد أن هناك إما ضلع مثل هناك . V_4 و V_1 هذا مسار يصل بين e_3 و e_8من مسار يصل بين هذه الرؤوس ممثلا .خرآمسار e_6 e_2 e_4وكذلك . V_4 و V_1 مسار اخر يصل بين e_1 e_5 e_4مسارات أخرى مثلا ولا أي u و vضلع يصل بين الرأسيين بينما في هذا الشكل: هذا رسم لا يوجد أي فهذا الرسم غير متصل بينما يسمى هذا الرسم ، عن بعضمنفصلينمسار؛ يعني رسما متصلا.

في هذا الدرس سنتعامل فقط مع الرسوم المتصلة .

ةوالأن حاولوا رسم كل من الرسوم التام: K_5 , K_4 , K_3 , K_2 , K_1

وكذلك الرسوم الثنائية التامة: $K_{3,3}$, $K_{2,2}$, $K_{1,2}$, $K_{1,1}$

أي من هذه الرسوم يمكن رسمها في المستوى أو على الورقة بدون تقاطع أضلاعها.

أهلا بكم مجددا أعزائي الطلبة وأتوقع أنكم حصلتم على نفس النتيجة وهي أن الرسميين K_5 و $K_{3,3}$. لا يمكن رسمهما في المستوى بدون أن تتقاطع أضلاعهما

وهذا يؤدي إلى التعريف التالي:

الرسم المستوي: هو الرسم الذي يمكن رسمه في المستوى بدون أن تتقاطع أضلاعه.

و **الرسم غير المستوي:** هو الذي لا يمكن رسمه في المستوى بدون تقاطع أضلاعه.

هي رسوم غير مستوية لا نستطيع K_5 وكذلك $K_{3,3}$ فمثلا كما لاحظنا في النشاط أن رسمها على الورقة بدون تقاطع أضلاعها . وكذلك أي رسم يحتوي هذه الرسوم كجزء منه فهو رسم غير $K_{3,3}$ هذا يحتوي $K_{3,4}$. يكون رسما غير مستويا. فمثلا لو أخذنا خمسة رؤوس يكون رسما غير ؛ أو أي رسم تام له أكثر من K_8 , K_7 , K_6 ولو أخذنا ،مستوي فمثلا هذا الرسم يمكن رسمه على الورقة بدون أن ، آخرمستويامستويا. لنرى رسما مستويا.تتقاطع الأضلاع ونسميه رسما

بالعودة إلى مسألة المنازل الثلاث والمحطات الثلاث والتي يمكن تمثيلها بالرسم الثنائي التام $K_{3,3}$ نرى أن هذه المسألة مستحيل حلها لأن الرسم $K_{3,3}$ رسما غير مستويا.

والان نعرف مفهوم اخر وهو رسم المستوى .

تعريف: رسم المستوى رسم مستوي : هو رسم مرسوم في المستوى دون تقاطع أضلاعه.

فمثلا هذا الرسم هو رسم مستوي لأنه يمكن رسمه في المستوى بدون تقاطع أضلاعه . لكن ليس رسم مستوى ورسمه ممكن أخذ هذا الضلع والتي يقطع الضلع الثاني ورسمه خارج الشكل ،بينما هذا رسم مستوى. هذا يسمى رسم مستوى فيكون بذلك رسم مستوى. بينما هنا ،مستوي وليس رسم مستوى؛ لأنه هنا رسمت الأضلاع بدون تقاطع تتقاطع الأضلاع في هذه النقطة.

سؤال: ماذا يحصل لو قصصنا الورقة على طول أضلاع رسم المستوى؟

على طول أضلاع الرسم الموجود في الورقة المرفقة أريد منكم قص الورقة ،لنرى ومن ثم إيجاد علاقة بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد القطع التي ،على الورقة نتجت معكم .

ى العلاقة التي تربط جو أن تكونوا قد توصلتم إلبة وأرأهلا بكم مجددا أعزائي الطل عدد الرؤوس بعدد الأضلاع وعدد القطع لرسم المستوى .

نلاحظ أولا أنه عند قص الورقة على طول أضلاع رسم مستوى نحصل على مجموعة من وقطعة واحدة مساحتها غير محدودة هي الرسم، ويحدها أضلاع محدودة،القطع ذات مساحات ونرمز لها **بالوجوه**نسمي هذه المساحات المحدودة بأضلاع من الرسم الخارجية.المساحة بالرمزF.

وبذلك يكون عدد ،ثانيا نلاحظ أن عدد الرؤوس 4 وعدد الأضلاع 6 وعدد الوجوه 4 الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه يساوي .

الرؤوس ما هو عدد ، فمثلا لو كان عندنا رسم مستوى بهذا الشكل ،لنأخذ مثالا أخر ؟ وعدد الاضلاع وعدد الوجوه

الرسم . أضلاع |V| عندنا 8= أي1,2,3,4,5,6,7,8رؤوس الرسم **<u>أولا</u>** وما هو عدد الوجوه ؟ .|E|1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. إذن عدد الأضلاع يساوي 12= .|F|إذن عدد الوجوه يساوي 6=1,2,3,4,5 وهناك الخارجي 6 .

الأن ما هو عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه ؟ هذا يساوي كما ترون 8 زائد 6 يساوي 14 ناقص 12 ويساوي 2 .

إذن بشكل عام هذه هي المعادلة التي تربط بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه. الاستنتاج نستطيع برهنة هذه المعادلة باستخدام و،**<u>معادلة أويلر</u>**وتسمى هذه المعادلة ي تبرهنوا صحتها فيما بعد . الرياضي وسأتركه لكم لك

من v على يحتوي مستوى رسم G كان إذا :(**معادلة أويلر**توصلنا الى نتيجة)
الأضلاع عدد ناقص الرؤوس عدد فإن الوجوه من f و الأضلاع من e و الرؤوس
مستوى رسم لأي دائما 2 يساوي وهالوج عدد زائد. أي أن $\boxed{v - e + f = 2}$

بعد تحويله أو رسمه في ينستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسم المستو
المستوى بدون تقاطعات ثم نطبق معادلة أويلر.

والان الى النشاط التالي :

ماذا عن الرسوم المرسومة على سطح الكرة أو سطح البالون ؟

فمثلا هذا بالون مرسوم عليه رسم بدون تقاطع للأضلاع هل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسم المرسوم على سطح البالون ؟

هنا كما تلاحظون مجموعة من الرؤوس ومجموعة من الأضلاع الغير متقاطعة ومجموعة من الوجوه .

لرسم المرسوم ا لو اعتبرنا أن التقاطعات هذه تمثل رؤوس ،كذلك على سطح كرة القدم فهل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسم هذا ،على الكرة وهذه هي الوجوه المرسوم على سطح الكرة ؟

إذا رسمنا رسما كما تشاهدون على عجل ،ماذا عن الرسوم المرسومة على عجل سيارة سيارة بدون تقاطعات، هذه هي الرؤوس والأضلاع وكذلك الوجوه . ،

سؤال:

هل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسوم المرسومة على سطح الكرة بدون تقاطع الأضلاع ؟

وهل نستطيع تطبيق معادلة أويلر على الرسوم المرسومة على عجل سيارة بدون تقاطع الأضلاع ؟

ما هي العلاقة بين عدد الرؤوس و عدد الأضلاع و عدد الوجوه في كل حاله؟

نشاط

أهلا بكم أعزائي الطلبة وأرجو أن تكونوا قد توصلتم إلى العلاقة التي تربط بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه للرسوم على سطح الكرة وكذلك على سطح العجل.

فإن العلاقة هي : **سطح الكرة** ما على فأ

نفس وهي .2 يساوي الوجوه عدد زائد الأضلاع عدد ناقص الرؤوس عدد ***المستوى في للرسوم العلاقة.*** أي $\boxed{v - e + f = 2}$

نجد أن العلاقة هي : **سطح العجل** بينما على

عدد الرؤوس ناقص عدد الأضلاع زائد عدد الوجوه يساوي صفر. أي $\boxed{v - e + f = 0}$

ختلاف يبن الرسوم على سطح العجل وسطح الكرة اوهذا ال

ننتقل إلى موضوع اخر وهو موضوع تلوين الخرائط وتلوين الرسوم . الأن نريد أن . إذا كان عندنا خارطة ا في السابق كيفية تلوين الخرائطأخذتم في الجغرافي بحيث أن كل بلدين نلون هذه الخارطة بألوان مختلفةلمجموعة من الدول ونريد أن متجاورين لهما لونان مختلفان .

<u>مكن من الألوان نحتاج إليه لتلوين مناطق المملكة بحيث أن كل سؤال: ما هو أقل عدد م مشترك (تلونان بلونين مختلفين؟ منطقتين متجاورتين)أي بينهما ضلع</u>

<u>الرسوم المرسوم في المستوى ؟)أي رسوم المستوى(وهل ينطبق هذا العدد على جميع ؟</u>

نشاط

أهلا بكم أعزائي الطلبة مرة أخرى وأرجو أن تكونوا قد توصلتم إلى أقل عدد من الألوان اللازمة لتلوين أي خارطة في المستوى . وهذا العدد هو أربعة كما تشاهدون على الرسم .

ع تلوين وجوه نستطي،م الذي أمامكم هنا وهو رسم مستوى ففي الرس،خرآلنأخذ مثالا فمثلا يلون الوجه الأول باللون الأخضر والمجاور له بلون أحمر ،ألوانالرسم بأربعة نستطيع تلوينه باللون فيبقى عندنا الوجه الخارجي والذي، وهذا باللون الأزرق ، الأسود .

ة تماما لتلوين خارطة المملكة وكذلك لتلوين أي أربعة ألوان كافيوبذلك نرى أن خارطة في المستوى .

رسم أي" (وتنص على أن**نظرية الألوان الأربعة**)هذه النتيجة تسمى نتيجة : ***وجهين كل أن بحيث وجوهه لتلوين لأق أو ألوان أربعة إلى يحتاج ستوىم مختلفان لونان لهما متجاورين" .***

بساطة نص هذه النظرية)نظرية الألوان الأربعة(فقد تبين أن برهانها ليس وعلى بالعملية السهلة وأنه صعب جداً.

والان لنرى كيف استفاد المهندسون من نظرية الرسوم في مسائلهم المعقدة.

انظروا إلى هذه اللوحة كم .Mother board(مبيوتر أو بما يسمى)لنأخذ مثلا لوحة الك يوجد فيها من رؤوس وكم يوجد فيها من أضلاع أو توصيلات. سواء على الوجه الأمامي الوجه الخلفي لهذه اللوحة. على أو

كيف استطاع العلماء أو المهندسون بشكل خاص تلافي مشكلة التقاطعات بين هذه التوصيلات ؟

تتم طبعاتها بالات تنزل هكذا بالقصدير أنتم تعلمون أن هذه الدوائر الكهربائية وترسم الخارطة الكهرائية .

كيف تلافى المهندسون التماس الكهربائي ؟؟

لة الحاسبة . كما ترون أن لوحة مبيوتر وهي لوحة الآلنأخذ مثالا أبسط من لوحة الك الحاسبة تتكون من دوائر كهربائية والتي نستطيع تمثيلها باستخدام لة الآ الرسوم . نظرية

هذه هي الرسمة المقابلة والتي تمثل الدوائر الكهربائية. والان أريد منكم أعزائي الطلاب أن تعملوا ضمن مجموعات على اللوحات المعطاة لكم والتوصيل بين هذه الحاسبة الآلة تمثل لوحة والتيالرؤوس كما هو موجود في الرسمة التي شاهدتموها لأن تقاطعها قد يحدث تماس كهربائي . ألقاكم بعد ،بحيث أن هذه الأسلاك لا تتقاطع قليل.

نشاط

أهلا بكم مجددا أعزائي الطلبة وأرجو أن تكونوا قد لاحظتم كيف تغلب المهندسون على مشكلة التقاطعات والتماس الكهربائي وذلك بثقب الألواح . ولتلافي أي تقاطع يتم ثقب اللوح والتوصيل من الخلف.

بهذا نكون قد أتينا إلى نهاية هذا الدرس .

والخلاصة من هذا الدرس أننا تعلمنا :

- خواص الرسوم المستوية
- معادلة أويلر التي تربط عدد الرؤوس بعدد الأضلاع والوجوه بالمعادلة $V - E + F = 2$.
- نظرية الألوان الأربعة : أي رسم مستوى يحتاج إلى أربعة ألوان أو أقل لتلوين وجوهه بحيث أن كل وجهين متجاورين لهما لونان مختلفان.
- طريقة التخلص من التقاطعات في الدوائر الكهربائية.

بهذا نكون قد أنهينا درس اليوم في أحد فروع الرياضيات وأرجو أن تكونوا قد حصلتم على مادة شيقة مما يدفعكم إلى المزيد من البحث والاستقصاء في الرياضيات ومكونات هذا الكون وما حولنا والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته .