

课程题目：解决概率问题的万能法

教师：卿恩明

职业信息：AP 经济学，SAT，TOEFL 教师

第 1 节：

Cassie: “Sherry, 你怎么看起来愁眉苦脸？”

Sherry: “ o(╯╰╯)o 唉。。。最近作业太多了！”

Cassie: 你每天要做多少作业啊？

Sherry: 不一定，做完一个老师的作业，大概在 30 - 90 分钟吧。有三位老师，张老师，何老师，黄老师都要布置作业！我明天还约了同学出去玩呢，也不知道作业能不能做完！

Cassie: “记得上节课我们做了一个游戏吗？你可以通过那堂课的内容，来估算一你做完作业，可以出去玩的概率。”

Sherry: “ 哦，你说的是那个游戏吧。我们 6 个人，4 个女生 2 个男生，围着转盘站成一个圈，我们转动了 3 次转盘，让我惊讶的是，我们一共抽到了 2 次男生，一次女生。 ” **【视屏放游戏】**

第 2 节：

Cassie: “大家是不是很惊讶？女孩的数量是男孩的两倍，为什么轮盘转了三次，抽中了两个男孩？我是不是在轮盘上面做了手脚呢？今天，我把那个轮盘带来了，现在让我们再来玩一玩这个游戏吧。并且让我们算一算抽取两个男孩的概率。与此同时，希望我们能找出一个万能的方法来处理日常生活中的未知事件。

活动 1：学生玩转盘游戏

第 3 节:

Cassie: “同学们，上个活动做得怎么样？在解决你们的困惑之前，我们来看一看屏幕上的树状图。树上很多分支，树的末端代表了各种可能，所有的末端加在一起称为：样本容量。Sherry, 你能够说明一下你对样本容量的理解吗？”

Sherry: “好的，样本容量中的所有结果都是不可再细分, 完全穷尽, 和相互排斥的。举个例子，在这个树状图的末端，有一种可能性是男男女女，还有一种是女女男，这两种结果就叫做不可再细分，因为在这个实验里，我们不考虑男孩或是女孩的其他信息，比如身高，体重，年龄，等等。我们只考虑他们的性别。所以最后的结果只可能是性别，也就是男女的排列组合。”

Cassie: “非常好。下面我们来讨论一下什么是相互排斥？什么又是完全穷尽？你能想出一些例子来解释这两个概念吗？比如说你们的数学成绩. 动动脑筋吧，我们马上就回来！”

活动 2: 学生通过讨论数学成绩，熟悉完全穷尽和相互排斥的概念。

第 4 节 :

Cassie: “你们得出什么样的结果呢？假设你的期末成绩只能是 A, B, C, D, 或者 F，不能有 A 加或者 A 减。这五种成绩就是一个样本容量。那么这五种成绩就是相互排斥的，因为一个同学不能同时又拿 A，又拿 B。这五种成绩也是完全穷尽的, 因为一个学生不可能拿到一个这 5 种成绩以外的成绩了。那么通过这些概念，我们来回想一下之前那个转盘游戏吧。”

Sherry: “回到我们的转盘游戏，样本容量就是女孩和男孩出现的所有可能性的组合。”

Cassie: 同学们，你能否想一想，转动三次转盘，那么所有男女组合的可能性有多少种呢？

活动 3: 学生计算转动三次转盘，男孩和女孩出现的所有可能？

第 5 节:

欢迎回来。你的答案是什么？转动三次转盘，男孩和女孩出现的排列组合有多少种呢？7 种还是 8 种？

我这里有一个树状图，我们把它叫做概率树。树的末端代表了每一种可能的排列组合结果。我们来数一数，1, 2, 3。。。, 这个树有 7 个末端，所以它反映了 7 个相互排斥，完全穷尽所有男女组合。这 7 种结果是相互排斥的，因为没有两种结果能同时出现。他们也是完全穷尽的，因为其中的一种结果一定会出现，同时，这 7 个末端又是不可再细分，因为每一个末端都表示了一种结果。注意，可不是 8 种哦，在这个游戏里，我们只有两名男生，所以不可能出现男男男的组合。

Sherry: " 现在我们已经完全搞清了样本容量的概念，让我们再做个练习吧。首先我们把每种结果的概率加入样本容量。在屏幕上，找出两男一女的结果，算出它的概率。

活动 4: 学生计算转动三次转盘，抽中两男一女的概率是多少？

第 6 节:

Cassie: 通过这个概率树状图我们可以看到，有三个加了颜色的末端包含了两男一女，所以两男一女的概率应该是这三个结果的概率相加。我们应该如何计算每种结果的概率呢？我们可以看到，男女的排序不同。在每一节小的树枝上，对应一个条件概率。一个事件的条件概率取决于另一个已经发生了的事件。Sherry, 我们来看男男女女这种情况。如果第一个选中的是男孩，那么再选一个男孩的条件概率是多少呢？同学们，你们也和 Sherry 一起思考一下，我们等会儿见！

活动 5: 学生计算男男女女这种情况的概率

第 7 节:

Sherry: "这里我们需要提到条件概率。如果我们已经抽取了一个男孩，那么这里就剩余 1 个男孩和 4 个女孩，所以在抽取一个男孩后，再抽取一个男孩的几率

是五分之一，这里的五分之一就是抽取该男孩的条件概率。如果我们想知道抽取男男女女的概率，我们就要把每次抽取时男女的条件概率乘起来，那么就是 $(2/6)*(1/5)*(4/4) = (1/15)$ 。同理我们可以算出女男男的概率： $4/6 \times 2/5 \times 1/4 = 1/15$ ，以及男女男的概率： $2/6 \times 4/5 \times 1/4 = 1/15$ 。如果我们把所有抽到两个男孩一个女孩的概率加起来， $1/15 + 1/15 + 1/15 = 1/5$ ，那在换算成百分比，那么就会得到 20%。

Cassie: “到了检测你们对知识点理解的时候了，我准备了一个问题：转三次轮盘，抽取 3 个女孩的概率是多少呢？”

活动 6: 学生算出抽取女女女的概率

第 8 节

Cassie: “欢迎回来，你们算的怎么样？大家可以看到，大屏幕上，样本容量依旧是这 7 种结果，所有的条件概率也和之前相同。我们把抽取三个女孩的条件概率相乘，就会得到 $(4/6)*(3/5)*(2/4) = (1/5) = 20%$ 这里的百分之 20 就是抽取三个女孩的概率”

Cassie: “同学们，你们还记得 Sherry 之前的烦恼吗？（播放 Sherry 做作业场景）下面我们来思考一下 Sherry 之前提出的作业量问题。张老师跟何老师每天要布置的作业量分别可能是 30 分钟，或者 60 分钟，或者 90 分钟，三种情况概率相同，并且两位老师的作业量互不影响。有时候，很幸运，如果两位老师的作业量都分别是 30 分钟，有时候非常不幸，因为两位老师的作业量都是 90 分钟。还有黄老师，她的作业量要么 30 分钟，要么 90 分钟，概率相同。并且黄老师的作业量独立于其他两位老师。”

活动 7: 学生根据三位老师每天的作业量画一颗概率树，预测每天可能的作业总量。

第 9 节:

Cassie: 欢迎回来。同学们，你们做的树状图跟老师的一样吗？下面我们来看一下

屏幕吧。先来看一下这棵树有多少个末端。1, 2, 3, 4, 5... 一共有 18 个末端，也就是有 18 种结果，每一种结果发生的概率刚好是 $1/18$ 。”

“同学们，你们可以根据作业量，做一个概率图吗？”

活动 8: 学生制作概率图

第 10 节:

Cassie: “屏幕上显示了一晚上不同的作业量的概率。运气好的时候，90 分钟作业量，概率是 $1/18$ 。有时候 120 分钟作业量，运气最差的时候 270 分钟的作业量，概率同样也是 $1/18$ 。”

Sherry: “换句话说，如果有 18 个晚上，那么我就会有一个晚上是非常幸运的，也会有一个晚上是非常不幸的，其他天，作业量会在 150-210 分钟不等。”

Cassie: 那么 sherry, 你明天还是不要和同学出去玩了吧。。。

Cassie: “通过这节课，希望大家获得了收获。下面，给你们出道题。你能算出连续两晚上的作业量的概率吗？连续 5 个晚上呢？试一试做一个概率图。把问题细化，大问题分成多个小问题。把每个小问题的结论结合起来就得到一个大问题的结论。希望下次再见！”

教师指导

老师，您好，首先，非常感谢你用这节课的视频。关于这节课，我有几个方面需要跟你沟通一下。这节课是关于计算随机事件发生的概率。主要学习目标是：学生可以通过学习概率的基本概念（样本容量，独立事件，相互排斥），画树状图，利用条件概率来计算出随机事件发生的概率。

(1) 在这节课最开始，学生做了一个转盘游戏，在这个游戏中，参与人数是 4 女 2 男，转盘转了 3 次。样本容量就包含了 7 种结果，不会出现男男男的结果。但是如果参与的男生有 3 名或者以上，转盘同样地转三次，那么样本容量就包含了 8 种结果，其中一种结果就是男男男的组合。老师可以根据实际情况来安排参与者的人数。甚至可以让转盘多转几次，增加样本容量的大小，检测学生是否理解了样本容量的概念。

(2) 转盘的制作其实很简单，只要带有可以转动的指针的工具，就可以了。为了保证游戏的一个公正性，老师可以随机点一名学生志愿者来转转盘。奖品可以是糖果，巧克力等一些小礼物。

(3) 老师在课前可以给学生演示一下树状图怎么画，这样学生在课堂上接触到树状图，就不会感到陌生了。比如，老师可以介绍一下树状图的开端，分支，末端分别代表什么。

(4) 第一次接触样本容量的3大特点时，学生可能觉得比较抽象。在小组活动时，老师可以参与学生的小组讨论，帮助他们找出一个好的实际例子来理解“完全穷尽”，“相互排斥”，“不可再细分”这三个概念的含义。

(5) 关于最后一个活动，让学生画一个关于作业量的概率图，可能对初学者有一定的难度。老师可以在课前跟学生介绍一下概率图的横纵坐标分别是什么，柱状图的特点。

再次感谢老师使用这节课的视频。如果对这节课有疑问，可以通过发邮件给我。最后，祝老师工作顺利。再见！