النص الصوتي لدرس

مسائل مدهشة : المتتاليات الحسابية و الهندسية

السلام عليكم، و أهلاً بكم في هذا الدرس، أنا عباس الحمادة معلم رياضيات في مدرسة السعودية المتوسطة للبنين، أرى أن الرياضيات جميلة و ممتعة، و لدي لكم اليوم بعض المسائل المدهشة أعرفكم بها، و نقوم بحلها معاً

هل أنتم جاهزون، حسناً إليكم هذا السؤال:

أريدكم أن تحسبوا كم هو مجموع الأعداد من 1 إلى 100، هل بوسعكم حساب ذلك خلال دقيقتين، حاولوا، و سأعود إليكم بعد قليل.

أهلاً بكم من جديد، لعلكم لم تتمكنوا من إكمال الحساب، لكن لا بأس...

تندرج هذه المسألة تحت عنوان المتتاليات أو الأنماط الرياضية، و تعتبر دراسة المتتاليات من الأمور الأساسية في الإحصاء و الهندسة، لما تقدمه من حل لمسائل تتصف بأن إيجاد حل لها -دون الاعتماد على قوانين المتتاليات- يستغرق وقتاً طويلاً، إذاً هي مفيدة في تسريع الحساب.

و ببساطة، المتتالية هي سلسلة من العناصر يربط بينها علاقة، كأن يكون العنصر مساوياً العنصر السابق مضافاً إليه عدد محدد أو عدد متغير بانتظام أو مضروباً بعدد محدد أو عدد متغير بانتظام أو لربما عدداً ثابتاً...

و بإمكاننا تعريف **المتتالية الحقيقية** بأنها تابع مجموعة تعريفه الأعداد الصحيحة الموجبة، و مجاله المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية.

الآن، أرجو أن تقسموا أنفسكم إلى مجموعات، و تحاول كل مجموعة اكتشاف النمط الرياضي لواحدة من المتتاليات التالية، ثم تكتبوا العنصر التالي في المتتالية:

1،4،7،10،.......

1،2،6،24،120،.....

2،2،2،2،........

0،1،1،2،3،5،8،13،.....

مرحباً بكم ثانية، أرجو أن تكونوا قد لاحظتم أنه في السلسلة الأولى كان كل عنصر يساوي العنصر الذي قبله مضافاً إليه 3، و بالتالي يكون العنصر الذي يلي 10 هو 13.

أما في السلسلة الثانية، فقد تم ضرب العنصر الأول بـ2، و ضرب العنصر الثاني بـ3، و الثالث بـ4، و هكذا علينا أن نضرب 120 بـ6 لنحصل على العنصر التالي و هو 720

أما السلسلة الثالثة فأمرها سهل، فكل عناصرها متماثلة و تساوي العدد 2، و العدد التالي هو 2 أيضاً

و أما السلسلة الأخيرة، فأول عنصرين منها تم وضعهما كما هما، ثم كل عنصر هو ناتج جمع العنصرين السابقين له، و هذه السلسلة بالذات لها تطبيقات رياضية عديدة و تسمى سلسلة فيبوناتشي و هناك درس ممتع على موقع بلوسومز يتناولها و اسمه "الرسوم النمطية المدهشة و معادلة الفرق" قدمته 'لورا زاغر' يمكنكم مشاهدته بعد الانتهاء من هذا الدرس.

إن السلسلة الأولى و السلاسل المشابهة لها، تسمى بالمتتاليات الحسابية، إذا كان الفرق بين أي حدّين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً. و تم تسمية ذلك المقدار الثابت بـ"أساس" المتتالية و سنرمز له بـ d

بإمكاننا أن نعبر عن ذلك بـ $d = a_{n+1} - a_n$

كما بإمكاننا أن نناقش موضوعها على النحو التالي:

$a_1 = a$

$a_2 = a + d$

$a_3 = a + 2d$

$a_4 = a + 3d$

$a_n = a + (n-1)d$

و هذا الأخير نسميه الحد العام

و لكن إذا لم نعرف الحد الأول، و عرفنا الحد a_k فيكون $a_n = a_k + (n-k)d$

و الآن، ما رأيكم أن تقوموا بهذا النشاط، أوجدوا الحد العاشر و الحد المئة للمتتالية

5،7،9،....

أهلاً بكم من جديد، ها، هل تمكنتم من حسابها، نعم المتتالية حسابية، و فيها $a = 5$ و $d = 7-5 = 2$

الآن $a_{10} = a + 9d = 5 + 9*2 = 23$

و $a_{100} = a + 99d = 5 + 99*2 = 203$

سأزيدكم بأنه لو أردنا أن نعرف ما هو الحد الذي قيمته 45 نكتب:

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$2*(n-1) + 5 = 45$$

$$n-1 = 40 / 2$$

$n = 21$ إذاً الحدّ الحادي و العشرين قيمته تساوي 45

تعالوا نتوسع و نستكشف هذه الأنماط أكثر، أليس بإمكاننا بفرض أن المتتالية منتهية أن نكتب مجموع هذه العناصر هكذا ؟

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + ... + (m-2d) + (m-d) + m$$

كما بإمكاننا كتابتها بشكل معكوس، هكذا:

$$S_n = m + (m-d) + (m-2d) + ... + (a+2d) + (a+d) + a$$

دعونا نقوم بجمع المعادلتين، على النحو التالي:

$$2S_n = a+m + (a+m) + (a+m) + ... + (a+m) + (a+m) + (a+m)$$

أي $2S_n = n(a+m)$ و منه نجد $S_n = (n/2)\ (a+m)$

هذه نتيجة رائعة، لكن ماذا لو لم نكن نعرف الحد الأخير m و عرفنا أساس المتتالية؟

أليس m هو الحد الأخير و يساوي $m = a_n = a + (n-1)d$ لنعوض في النتيجة التي توصلنا إليها فنجد:

$$S_n = (n/2)\ (a + a + (n-1)d)$$

$$S_n = (n/2)\ (2a + (n-1)d)$$

سأترككم دقائق الآن لتحسبوا بالاعتماد على ما توصلنا إليه مجموع الأعداد من 1 إلى 100 خلال دقيقتين فقط، تذكروا خلال دقيقتين فقط، و مجموع الأعداد الخمسين الأولى من المتتالية: 2،4،6،8،10،... خلال دقيقتين إضافيتين. هيا يا أعزائي. ألقاكم بعد قليل.

أهلاً بكم، لقد كان الحساب سهلاً، نعم بكل بساطة عوضنا في القانونين الذين توصلنا إليهما

$$S_{100} = 100 / 2 * (1+100) = 50 * 101 = 5050$$

$$S_{50} = (50/2)*(2*2 + (50-1)*2) = 25 * (4+98) = 2550$$

و الآن شاهدوا ما حصل معي بالأمس القريب عندما كنت ألعب الشطرنج مع صديقي

عباس: هذه اللعبة رياضة للعقل، و تدفع إلى التفكير العميق قبل كل حركة
عبد الله: نعم و لاختراعها قصة طريفة، حدثت في الهند قديماً
عباس: في الهند! ما هي؟!
عبد الله: ابتكر هذه اللعبة رجل و قدمها هدية للملك ، فسُرّ بها الملك و أعجبته، و سأل الرجلَ أن يطلب مكافأة له على هذا العمل
فما كان منه إلا أن طلب أن يعطى عن كل مربع من مربعات الرقعة الأربعة و الستين، حبة قمح عن المربع الأول و حبتين عن الثاني و أربع حبات عن الثالث و ثمانية عن الرابع... و هكذا تتضاعف الحبات إلى المربع الرابع و الستين
عباس: و لكن ما هذا الطلب الغريب!!!
عبدالله: لقد ظن الملك أن الرجل يطلب شيئاً بسيطاً، فطلب من وزيره أن يعطى الرجل كيساً كاملاً من القمح
عباس: و ماذا بعد؟
عبد الله: لقد طلب الرجل أن يعطوه بالضبط ذلك القدر الذي طلبه، و هنا انهمك المستشارون في حساب كمية القمح بدقة، و اكتشفوا أنها هائلة جداً و لا يستطيع الملك إعطاءه إياها، فهي تتجاوز انتاج كل الممالك من القمح لعدد من السنين.
عباس(يلتفت إلى الطلاب) : هل هذا معقول؟

هل تعتقدون أن هذه القصة معقولة؟! فكروا في ذلك بضع دقائق و حاولوا حساب كمية القمح، و سأعود إليكم.

أهلاً بكم، و تعالوا نتفحص هذا النوع من المتتاليات،

1، 2، 4، 8، 16، 32، ....

إنها متتالية هندسية، و فيها كل حد يساوي ناتج ضرب الحد السابق له بعدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية، سنرمز له بـ r و هو في هذه الحالة $r=2$

لنكتب:

$a_1 = a$

$a_2 = ar$

$a_3 = ar*r = ar^2$

$a_4 = ar^3$

و لكن إذا كان الحد الأول هو a_k فيكون الحد العام $a_n = a_k r^{n-k}$

ماذا عن مجموع حبات القمح في قصة الشطرنج؟

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots. + ar^{n-1} \qquad (1)$$

إذا كان r لا يساوي الصفر، بضرب طرفي المعادلة بـ r نجد

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots. + ar^n \qquad (2)$$

بطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية هذه نجد:

$rS_n – S_n = ar^n - a$

$S_n = a (r^n - 1) (r-1)$

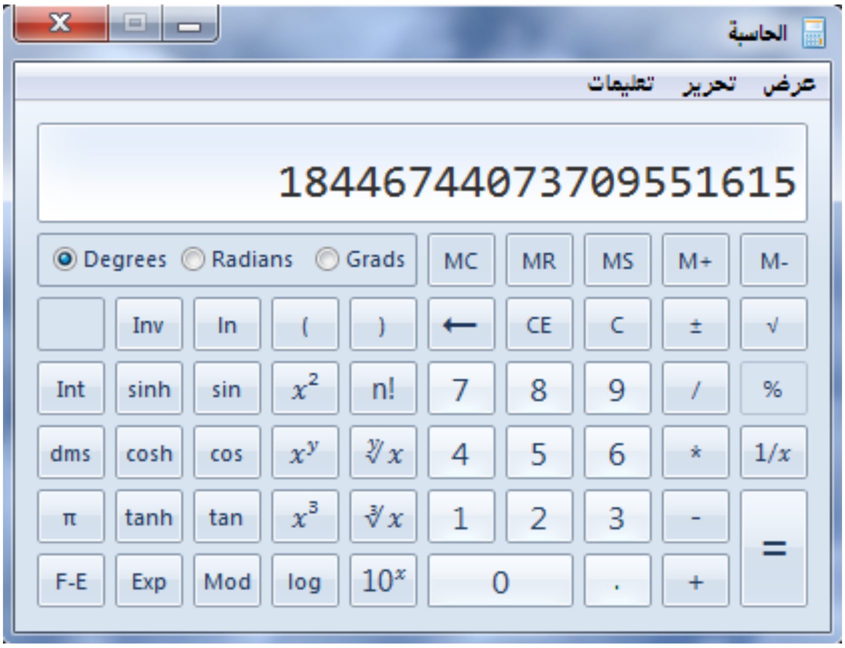
لاحظوا أنه من المعادلة (1) إذا كانت r=1 فإن $S_n = a * n$

و إذا كانت r لا تساوي 1 فإن $S_n = a (r^n - 1) / (r - 1)$

و لأن رقعة الشطرنج فيها 64 مربعاً، نكتب

$S_{64} = 1 (2^{64}-1) / (2-1) = 2^{64} – 1 = 18446744073709551615$

(ثماني عشرة كوينتليون و أربعمئة و ست و أربعين كوادرليون و سبعمئة و أربع و أربعين ترليون و ثلاث و سبعين مليار و سبعمئة و تسع ملايين و خمسمئة و إحدى و خمسين ألف و ستمئة و خمس عشرة حبة قمح)



و باعتبار أن كل 1000 حبة قمح تزن 40 غراماً سيكون وزن القمح المطلوب أكثر من 700 مليار طن

و هو ما يعادل 1000 ضعف من الانتاج العالمي للقمح سنوياً

حسناً بعد أن رأينا كيف تتضخم الأرقام بسرعة في المتواليات الهندسية، سأعرض عليكم هذا العرض، لدي سيارات للبيع بالتقسيط لمدة شهر أي30 يوماً فقط

تدفعون في اليوم الأول هللة واحدة و في اليوم الثاني هللتين، في اليوم الثالث 4، في اليوم الرابع 8 هللات،..... و هكذا إلى اليوم الثلاثين، حيث سأسلم من يكمل الدفعات الثلاثين سيارة فخمة حديثة !!! و أحول إلى حسابه في المصرف مليون ﷼ إضافة إلى ذلك !!!

إذا كنتم تودون شراء سيارة أو كان لديكم أية استفسارات عن هذا الدرس، فبوسعكم إرسالها إلى بريدي الإلكتروني abs@mohaffez.com

و السلام عليكم و رحمة الله و بركاته

أهلاً بكم أعزائي المعلمين، و شكراً لكم على اختياركم هذا الدرس لطلابكم

كما رأيتم يدور موضوع هذا الدرس حول المتتاليات و يقوم بتقديمها من خلال مسألتين طريفتين ممتعتين فيهما من التحدي و الاندهاش ما يجذب انتباه الطلاب.

هذا الدرس موجه لطلاب المرحلة الثانوية، و جميع المعلومات التي يرتكز عليها الدرس يتم تناولها في المرحلة المتوسطة مثل المعادلات و العمليات عليها من ضرب و طرح...

في نهاية النشاط الأول ربما تجدون أنه من المناسب ذكر قصة جاوس مع معلم الرياضيات و قد ذكرتُها في دليل المعلم المكتوب و المرفق مع هذا الدرس المرئي.

في النشاط الرابع تُلفتون انتباه الطلاب أن الخمسين حداً الأولى هي نفسها الأعداد الزوجية من مجموعة الأعداد من 1 إلى 100

في نهاية المقطع السادس يمكنكم أن تخبروا طلابكم عن أن هناك الكثير من المسائل في الحياة العملية تحتاج إلى فهم لموضوع المتتاليات الحسابية و الهندسية

فمثلاً عدّ أشياء مرتبة على شكل هرمي و عد الكراسي في بعض المدرجات يعتبر من مسائل المتتاليات الحسابية

و طريقة زيادة راتب موظف سنوياً بنسبة مئوية، و ازدياد عدد سكان العالم هما مثالان على المتتاليات الهندسية

و أنه في مثال الشطرنج عندما **r=2** يكون مجموع الحدود السابقة يساوي الحد الحالي - 1

أي مثلاً في المربع الرابع 8 حبات قمح، و مجموع الحبات في المربعات الثلاثة الأولى يساوي 8-1=7

هنالك العديد من المسائل الإضافية التي يمكن طرحها على الطلاب لأجل التوسع في فهم المتتاليات، مثلاً:

1. متتالية حسابية أكمل الحدود الناقصة: 5،....،....،....،....،35-،....
2. أوجد المتتالية الحسابية إذا علمت أن $a_4 = 12 , a_7 = 18$
3. هل المتتالية 1 ، 1/2 ، 1/3 ، 1/4 ، ... متتالية هندسية؟
4. أثبت أن المتتالية $(a^{n-1}/2)$ هندسية ثم أوجد حدّها السادس

أخيراً أتوجه بالشكر إلى كل من ساهم في إنجاح هذا الدرس ، و آمل أن يكون إضافة مفيدة للمكتبة العلمية العربية، و دمتم بخير.