

# 如何估算 $\pi$ 值？

冯仁勇

中国重庆第二外国语学校

同学们好，欢迎大家来到这节课，我的名字叫冯仁勇，我来自中国重庆第二外国语学校。在这节课里，我将和大家一起估算 $\pi$ 的值。

各位同学，首先，我要问大家一个问题：“你知道什么是 $\pi$ 吗？”这儿，我并不是想问你 $\pi$ 的数值是多少，而是 $\pi$ 的基本定义是什么，和它的数值无关。你能回答我的问题吗？

如果你已经得到了这个问题的答案，你能够想出一些方法来测算 $\pi$ 的数值吗？你就当作没有人曾经告诉过你这个数值，你需要自己来探索。好了，开始我们的探索吧！我相信你们一定能够在探索中获得无穷的乐趣。

活动1：什么是 $\pi$ ？它的基本定义是什么？

通过大家的讨论，相信大家已经知道答案了吧！ $\pi$ 就是一个圆的周长和它的直径的比值，而且这个比值是一个常数。有了这个常数，当我们已知一个圆的半径或直径时，我们就可以用它来计算圆的周长或者面积。今天我们将和大家一起来研究一下这个常数是怎么测算出来的。好，下面由我先给大家试试吧。

按照 $\pi$ 的定义， $\pi$ 就是一个圆的周长 $l$ 与它的直径 $d$ 的比值。因此我们只要能够直接测量出一个圆的周长 $l$ 和它的直径 $d$ 的值的话，那么，我们就可以直接用公式 $\pi = \frac{l}{d}$

来估算出 $\pi$ 的值。好了，看我的吧。各位同学，我这里呢，是一个胎压正常的轮胎。现在，我在它的外沿涂上油漆。好了，现在我慢慢地向前滚动这个轮胎，注意，尽量沿直线滚动，小心一点。这样呢，大家因该可以看到。在我后面就会留下两个油漆的印子。那么大家应该可以想象，印子之间的距离应该就是这个轮胎的周长。现在我们来测量一下这两个油漆印子间的距离。我这皮尺测量出来，大约是2米14。下面我们来测量轮胎的直径。首先，让轮胎靠紧花坛的边缘，再用三角尺靠紧轮胎，并使得三角尺尽量和花坛的边缘平行。现在我可以通过这样的方法测出轮胎的直径，大约是67厘米。根据我们刚才的测量，轮胎的周长 $l$ 就等于214厘米，轮胎的直径 $d$ 就等于67厘米，这样 $\pi$ 就大约等于214除以67，约等于3.19。

看清楚了吗？很简单的，你也会的！如果你身边没有轮胎。你也可以利用身边的水杯，比如，用纸条来绕水杯一周来测量水杯的周长，再用三角尺或直尺来测量水杯的直径。这样，你就非常容易地估算出 $\pi$ 的值了。下面的时间留给大家，亲自动手试试吧。

活动2: 学生自己动手用身边可以利用的事物来估算  $\pi$  的值。

怎么样, 很有趣吧? 你们有没有亲自用滚动轮胎的办法来估算  $\pi$  的值呢? 你们得到的  $\pi$  的值与真实值之间非常接近吗? 为了提高精确度, 减少误差, 我们可以用反复测量, 求平均值的办法来减少我们测量中的误差。

还有别的方法吗? 下面, 你的老师将发一张带有坐标图形的纸给你, 在这张图上有 100 个小正方形, 和一段四分之一圆弧, 老师希望你们用这张纸来估算一下  $\pi$  的值。下面的时间留给大家, 动动脑筋吧, 我们一会儿再回来。

活动3: 学生用坐标纸估算  $\pi$  的值。

好了, 你们得到答案了吧? 你们是如何得到答案的, 有没有数一数圆弧内和圆弧外的方格个数呢? 它们又与  $\pi$  的值有怎样的联系呢? 各位同学, 下面我们一起来分析一下, 如何利用这张图来估算  $\pi$  的值。

那么现在我们假设, 这个扇形的半径是 1, 于是我们就可以得到这个准确的扇形的面积就等于:  $S$  应该是四分之一  $\pi$  乘  $r$  的平方, 也就等于四分之一  $\pi$ 。这是准确的面积。那么现在, 我们又用方格的面积来估算一下那个扇形的面积。也就是说, 我们只需要数出那个扇形内的小方格的个数就可以估算出来了。每个小方格的面积应该是一百分之一, 只要我们数出那个扇形内小方格的个数, 我们就可以得到里面的那个扇形的面积了。那么为了数的时候比较简洁呢, 我们也可以数这个扇形外面的小方格的个数。那么这样数起来就比较容易。来, 我们大家来看一下, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 21 个。那我在数的时候呢, 是把圆弧上相交的那个小方格呢, 只要面积部分较大的在外面就计算在外面, 面积较小的, 就计算在里面。这样数出来呢, 扇形外面就是 21 个。那我现在把它记为: 外面用一个小  $m$  来表示, 它就等于 21。也就可以得到, 我们在扇形内的小方格的个数是 79。也就是我们那个扇形的面积就约等于 79 乘以  $1/100$  了, 也就等于 0.79。也就是  $\pi/4$  约等于 0.79。这样, 接着我们就可以估算出  $\pi$  的值了, 那么,  $\pi$  呢就约等于 3.16。

好了, 我们利用这个图形就这样估算出了  $\pi$  的值了。这个很简单吧! 我们再来试一下! 现在, 老师再给每个同学发一张纸, 上面的图形变成了  $20 \times 20$  的方格纸, 请大家用这张纸再测算一次  $\pi$  的值。看看这次测算的结果是更好还是更坏?

活动4: 学生用  $20 \times 20$  的方格纸来估算  $\pi$  值

都做好了吧! 我们把图纸变成  $20 \times 20$  的方格纸以后, 你们得到的  $\pi$  的值是多少呢?

当方格变成 $20 \times 20$ 以后，我们得到的 $\pi$ 的估算值是3.15。比刚才得到的3.16更加接近准确值3.14？那我们是不是会得到一个结论，当方格数越来越多，越来越小的时候，我们测算的 $\pi$ 的值就更加精确吗？理论上是可行的，但是在操作当中，我们数方格数的个数的时候，将越来越困难。那要得到更加精确的 $\pi$ 的值，我们要怎样做呢？

来，我们换一种有趣的方法再试一试！你掷过飞镖吗？你喜欢掷飞镖吧！你看过蒙着眼睛掷飞镖吗？下面我们把上面数方格的方法换成掷飞镖再来试试。来，这位同学，你过来配合一下。来，这是一个边长为2的正方形，里面这个最大的圆是它的内切圆。现在我需要你蒙上眼睛，往里面扔20次飞镖。然后看看结果怎么样？好了，可以开始了。

怎么样，你们一定也想试试吧？下面的时间留给大家，由大家掷20次飞镖，记录落在圆内和圆外的次数，如果每次飞镖没有落入正方形内，就再掷一次，直到20次都落入正方形内。然后，请大家讨论一下，能不能利用落入圆内和圆外的次数来估算 $\pi$ 的值。另外，掷飞镖的时候，请同学们一定要非常小心，因为掷飞镖非常危险，你的老师可能让你掷那种橡皮底的或者像我这种磁性的飞镖来代替金属尖的飞镖。

活动5：学生用掷飞镖的方法来估算 $\pi$ 的值

这个方法很有趣吧。可是这个方法能测算出 $\pi$ 的值吗？

各位同学，我这里做了一个边长为2的正方形靶子，并在靶子内画了一个它的内切圆。然后我这里呢，随机地往正方形靶子内投掷飞镖 $n$ 次，并记录落在圆内的次数 $m$ ，这样根据几何概型的原理，圆的面积和正方形面积的比值呢，就大约等于 $m/n$ ，这样圆的面积就约等于 $2 \times 2 \times m/n = 4m/n$ 。又因为圆的面积等于 $\pi$ 乘以1的平方，这样 $\pi$ 就约等于 $4m/n$ 。根据刚才我们投掷的情况可以看到，20次飞镖当中，有17次落在了圆内。按照我们前面的公式计算， $\pi$ 等于3.4。那这个结果呢和我们实际的值相差很远。原因是，我们投掷飞镖很不稳定，那么如果要得到一个比较精确的值的的话，我们需要大量的重复的实验，也就是说，通过很多次很多次投掷飞镖才能得到比较精确的值。

随着信息技术的迅猛发展，电脑可以帮助我们解决很多实际问题了。同学们应该看过用电脑来模拟抛掷硬币的实验吧？如果我们能够用电脑来模拟我们刚刚做过的掷飞镖的实验的话，那么，我们就可以很方便、很快捷地得到大量的试验结果了。那么，怎么用电脑来模拟掷飞镖的实验呢？请同学们首先考虑这个问题，你可以和周围的同学一起讨论，必要时，你也可以向老师寻求帮助。下面的时间留给大家，我们马上回来。

活动6：思考如何通过电脑来模拟投掷飞镖的过程，从而估算 $\pi$ 的值。

欢迎回来!你们已经得到了用电脑模拟掷飞镖的方法了吧?你们是如何用电脑来模拟掷飞镖的呢?下面请同学们看看,老师是怎么用电脑来模拟掷飞镖的,看看跟你的方法是不是一样的呢?

首先,我们把飞镖的靶子放到坐标系下。因为是一个圆和一个正方形,所以,我们将圆心放到坐标原点。由于在四个象限,各部分的图形是全等的。所以,我们只需要考虑第一象限的情况就可以了。这样,飞镖在第一象限的落点可以用坐标 $x, y$ 来表示。因为内切圆的半径是1,所以 $x, y$ 的值在0到1之间。如果 $x^2 + y^2 > 1$ ,则表示此点在圆外。反之,则在圆内。所以,如果我们让电脑随机的产生 $n$ 组 $x, y$ 的值,也就是生成了 $n$ 个坐标是 $x, y$ 的点。从而来模拟掷了 $n$ 次飞镖,这个 $n$ 的值可以取100, 500, 1000, 甚至10000。然后我们对 $[x^2 + y^2]$ 取整。注意,这里取整是指取整数部分。比如这个数是1.5,我们就取1;如果是0.23,取0,而不是用我们平时说的四舍五入。这样我们也就得到了0或1这样的一些数字。最后我们把取整得到的0或1求和,直接用求和公式就可以了。那么这样,求和的结果就会得到我们在单位圆外的点的个数 $m$ ,从而在单位圆的点的个数就是 $(n-m)$ 个。这样,我们就可以利用
$$S = \pi \times 1^2 = 4 \times \frac{n-m}{n} \Rightarrow \pi = 4(1 - \frac{m}{n})$$
来估算 $\pi$ 的值了。

好了,你们已经很清楚用电脑模拟掷飞镖估算 $\pi$ 的值的原理了吧?请在课后,亲自用电脑操作一下,也可以和你的老师一起探讨一下详细的步骤。等着你们的好消息!

各位同学,这节课大家过得非常愉快吧?有趣吗?我们用四种方法估算了 $\pi$ 的值。下边我们一起来总结一下:

第一, 四种方法都用了不同的数学方法,数学思想,都能够估算 $\pi$ 的值。

第二, 我们来总结一下4种方法各自的优劣:第一种方法,滚轮胎的方法是非常直接的方法,也就是物理上的最简单的测量的方法。我们如果能够根据物理知识,减小误差的话,也是非常直接的,比较能够测出稳定的结果的;第二种方法,数格子方法,用的是数学上逼近的思想,但是由于格子小的时候数起来比较麻烦,所以很难达到精准;第三种方法,很有趣的方法,就是掷飞镖的方法,但是由于它的随机性,测算的结果很不稳定,是它的缺点。第四种方法,用电脑来模拟掷飞镖的方法,这个方法非常有趣,而且呢快捷,能够得到大量的实验的结果,可以得到比较精准的结果,也很方便。

第三,请同学们继续对以上四种方法进行改进,然后思考有没有别的方法,使得我们估算的 $\pi$ 的值更加精准,这个留给大家下去继续努力吧。

谢谢同学们的观看和参与!祝各位同学们学习愉快!再见!

## 教师指导

老师，您好，感谢您使用这节课的视频。下面有几个方面跟老师沟通一下。

第一，我们这节课用了四种方法来估算 $\pi$ 的值，一方面是想让学生亲自参与实践来测算 $\pi$ 的值，另一方面也是为了激发学生对几何概型学习的兴趣，并且对这个几何概型加深理解而设计的。

二，我们这节课测算的 $\pi$ 的值不要求特别精确，特别是那个掷飞镖的实验，误差比较大，但主要是要激发学生的兴趣，同时要提醒老师，掷飞镖的实验要注意安全，老师可以使用像我这样的磁性飞镖，可以大大提高它的安全性。也可以想一下用别的方法来取代这个实验也是可以的。

三，如果对测算结果要求精度比较高的话，应该是滚轮胎的方法和电脑模拟掷飞镖的方法。用电脑测算的方法应该是最合适的。它可以把数据增加到上万次，甚至可以用多次测算求平均值的方法来达到精准的估算 $\pi$ 的值。

四，通过学生的亲自参与，让学生体会到测算过程中影响结果的因素是非常多的。同时，他们体会了测算过程，也可以引导他们不断的探索改进的方法和寻找新的测算的方法。

五，如果有的学校老师和学生没有条件使用电脑的话，可以使用我们附件中的表格，把我们测算的结果印出来，让学生直接通过我们附件中的数据来估算 $\pi$ 的值。

六，在实际上课的时候，老师可以让各小组的同学互相竞争，比一比哪个组的测算结果更加精确，哪一组的方法更好，哪一组使用的材料更简单。这样可以激发学生的学习热情。

七，关于用电脑模拟掷飞镖实验的详细步骤和演示视频都放在附件里面了，请老师到附件里面观看和详细解读。

再次感谢老师使用这节课的视频，如果对这段视频还有什么别的问题，请直接通过下面的邮箱和我联系。祝老师工作愉快，再见！